2024-ΛΥΚΕΙΑ-ΤΕΣΤ 1

ΕΚΔΟΧΗ 1

1. Ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι και έστω ν η ένδειξη του ζαριού. Στη συνέχεια ρίχνουμε ν κανονικά νομίσματα. Η πιθανότητα να φέρουμε ακριβώς 2 Κορώνες είναι περίπου:

Α. 20,67%
Β. 23,33%
Γ. 25,78%
Δ. 29,67%

ΛΥΣΗ

Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα :

Εμφάνιση αριθμού στο ζάρι	Επιθυμητό αποτέλεσμα νομίσματος
2	2 Κ
3	2 Κ , 1 Γ
4	2 Κ , 2 Γ
5	2 Κ , 3 Γ
6	2 Κ , 4 Γ

Ας εξετάσουμε κάθε περίπτωση ξεχωριστά:

1. Ρίχνουμε 2 νομίσματα. Έχουμε 2^2 δυνατά αποτελέσματα. Άρα P (2K) = 1/4
2. Ρίχνουμε 3 νομίσματα. Έχουμε 2^3 δυνατά αποτελέσματα. Δυνατοί τρόποι να πάρουμε τις 2 Κ και 1 Γ είναι 3!/2! = 3. Άρα ζητούμενη πιθανότητα P (2K) = 3/8
3. Ρίχνουμε 4 νομίσματα. Έχουμε 2^4 δυνατά αποτελέσματα. Δυνατοί τρόποι να πάρουμε τις 2 Κ και 2 Γ είναι 4!/(2! . 2!) = 6. Άρα ζητούμενη πιθανότητα P (2K) = 6/16 = 3/8
4. Ρίχνουμε 5 νομίσματα. Έχουμε 2^5 δυνατά αποτελέσματα. Δυνατοί τρόποι να πάρουμε τις 2 Κ και 3 Γ είναι 5!/(2! . 3!) = 10. Άρα ζητούμενη πιθανότητα P (2K) = 10/32 = 5/16
5. Ρίχνουμε 6 νομίσματα. Έχουμε 2^6 δυνατά αποτελέσματα. Δυνατοί τρόποι να πάρουμε τις 2 Κ και 4 Γ είναι 6!/(2! . 4!) = 15. Άρα ζητούμενη πιθανότητα P (2K) = 15/64

Έστω P (ν) : η πιθανότητα η ένδειξη ν να εμφανίζεται στο ζάρι. Τότε : P (ν) = 1/6 , ν = 2 , 3 , 4 , 5 , 6
P (2K) = P (2) . (1/4) + P(3) . (3/8) + P(4) . (3/8) + P(5) . (5/16) + P(6) . (15/64) = 33/128 = 0,2578.

2. Η μηχανή ενός εργοστασίου παράγει μεταλλικές ράβδους, το μήκος των οποίων ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ = 6,5 cm. Το εργοστάσιο έχει θέσει ως ανώτερο όριο αποδοχής των παραγόμενων ράβδων το μήκος των 6,54 cm. Για την ευκολότερη μελέτη της διαδικασίας, ένας στατιστικός μελετά τις παρατηρήσεις που προκύπτουν, εάν από το μήκος της κάθε ράβδου αφαιρεθεί η μέση τιμή και το αποτέλεσμα διαιρεθεί με την τυπική απόκλιση. Οι νέες τιμές που προκύπτουν ακολουθούν επίσης την κανονική κατανομή. Με αυτές τις προϋποθέσεις, 1 στις 40 παραγόμενες ράβδους απορρίπτεται. Την προηγούμενη Παρασκευή λόγω βλάβης απορρίφθηκε 1

στις 667 παραγόμενες ράβδους και το όριο των 6,54 cm μετατράπηκε σε κατώτερο. Κατόπιν έρευνας, διαπιστώθηκε ότι η τυπική απόκλιση δεν είχε αλλάξει, αλλά είχε μετατοπιστεί η μέση τιμή προς μια ανώτερη τιμή. Η μέση τιμή του μήκους των ράβδων που παράχθηκαν την προηγούμενη Παρασκευή ήταν:

Α. 6,56 cm
Β. 6,58 cm
Γ. 6,59 cm
Δ. 6,60 cm

ΛΥΣΗ

Έστω η τυχαία μεταβλητή Χ : το μήκος των μεταλλικών ράβδων. Η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ = 6,5 cm και τυπική απόκλιση σ. Γνωρίζουμε ότι εάν από κάθε παρατήρηση μιας κατανομής αφαιρέσουμε την μέση τιμή και διαιρέσουμε με την τυπική απόκλιση, τότε οι νέες παρατηρήσεις που προκύπτουν έχουν μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1. Αφού οι αρχικές τιμές ακολουθούν την κανονική κατανομή και οι νέες τιμές που θα προκύπτουν, με την παραπάνω διαδικασία, θα ακολουθούν επίσης την κανονική κατανομή. Επίσης, γνωρίζουμε ότι θα ισχύει ότι :
Το 68% των παρατηρήσεων θα βρίσκεται στο διάστημα (-1,1).
Το 95% των παρατηρήσεων θα βρίσκεται στο διάστημα (-2,2).
Το 99,7% των παρατηρήσεων θα βρίσκεται στο διάστημα (-3,3).
Η πιθανότητα απόρριψης μιας ράβδου είναι 1/40 = 0,025, δηλ. 2,5%.
Από το σχήμα της κανονικής κατανομής η τιμή αυτή αντιστοιχεί στο 2,5% των παρατηρήσεων πάνω από την τιμή 2 ή κάτω από την τιμή -2 γιατί 50% + 47,5% = 97,5% . Επομένως , θα ισχύει ότι :
(6,54 – 6,5)/σ = 2 => σ = 0,02 ή (6,54 – 6,5)/σ = -2 => σ = -0,02 που απορρίπτεται. Άρα, η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ = 6,5 cm και τυπική απόκλιση σ = 0,02 cm.
Την προηγούμενη Παρασκευή λόγω βλάβης η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθούσε την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ = 0,02 cm, αφού η τυπική απόκλιση δεν είχε αλλάξει. όμως, η πιθανότητα απόρριψης ήταν 1/667 = 0,0015 δηλ. πάνω από την τιμή 3 ή κάτω από την τιμή -3 γιατί (100% - 99,7%)/2 = 0,0015. Συνεπώς , θα πρέπει να ισχύει:
(6,54 – μ)/0,02 = 3 => μ = 6,48 cm ή (6,54 – μ)/0,02 = -3 => μ = 6,60 cm.
Υποσημείωση: Η συγκεκριμένη άσκηση είναι εντός ύλης και λύνεται σύμφωνα με τη θεωρία του εγκεκριμένου από το Υπουργείο βιβλίου της Γ! Λυκείου " Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής". Συγκεκριμένα βασίζεται στη θεωρία που αναπτύσσεται :
1. Στην παράγραφο "Μέτρα θέσης" , στην υποπαράγραφο "α) Μέση Τιμή"
2. Στην παράγραφο "Μέτρα Διασποράς", στην υποπαράγραφο "δ) Τυπική απόκλιση"

3. Στο πλαίσιο μιας φιλανθρωπικής εκδήλωσης ένας ποδοσφαιρικός σύλλογος αποφασίζει να διοργανώσει μια λοταρία. Κάθε ένας από τους 1.000 συμμετέχοντες θα πρέπει να επιλέξει ένα γράμμα του ελληνικού αλφαβήτου και δύο ακέραιους αριθμούς από 0 έως και 9, οι οποίοι όμως δεν θα πρέπει να επαναλαμβάνονται. Ο μεγάλος νικητής θα λάβει 1.000 ευρώ εάν, μετά την κλήρωση, έχει τον αριθμό Μ39. Διαφορετικά, θα λάβει 50 ευρώ εάν έχει σωστό το γράμμα και έναν αριθμό ή θα λάβει 10 ευρώ εάν έχει σωστό μόνο το γράμμα της κλήρωσης. Ο ποδοσφαιρικός σύλλογος εκτιμά ότι, κατά μέσο όρο, θα λάβει μέρος στη λοταρία το 86,5% των συμμετεχόντων στην εκδήλωση. Εάν ο ποδοσφαιρικός σύλλογος θέλει να έχει κέρδος τουλάχιστον 700 ευρώ από τη λοταρία, το ελάχιστο ποσό που θα πρέπει να πληρώσει κάθε παίκτης για να λάβει μέρος σε αυτή θα πρέπει να είναι:

Α. 1 ευρώ
Β. 1,5 ευρώ
Γ. 2 ευρώ

Δ. 2,5 ευρώ

ΛΥΣΗ

Η πιθανότητα κλήρωσης του αριθμού Μ39 είναι: (1/24)*(1/10)*(1/9) = 1/2160

Η πιθανότητα να πετύχει κάποιος το σωστό γράμμα και έναν αριθμό είναι:
(1/24)*(1/10)*(8/9)+ (1/24)*(8/10)*(1/9) = 16/2160
Η πιθανότητα να πετύχει μόνο το σωστό γράμμα είναι: (1/24)*(9/10)*(8/9) = 72/2160.
Η πιθανότητα να μην επιλέξει ούτε το σωστό γράμμα αλλά ούτε τον σωστό αριθμό είναι: 1 – (1/2160) – (16/2160) – (72/2160) = 2071/2160
Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα

Πιθανές περιπτώσεις	Πιθανότητα
1000 ευρώ	1/2160
50 ευρώ	16/2160
10 ευρώ	72/2160
0 ευρώ	2071/2160

Επομένως, οι αναμενόμενες πληρωμές της λοταρίας θα είναι:

Πληρωμές = 1000 * (1/2160) + 50 * (16/2160) + 10 * (72/2160) + 0 * (2071/2160) = 1,17 ευρώ.

Ο ποδοσφαιρικός σύλλογος αναμένει ότι θα λάβουν μέρος στη λοταρία 865 άτομα. Αφού θεωρεί ότι θα πρέπει να έχει συνολικό κέρδος 700 ευρώ, θα πρέπει να έχει κέρδος (700/865) = 0,81 ευρώ ανά άτομο. Συνεπώς, κάθε άτομο θα πρέπει να πληρώσει για τη συμμετοχή του 1,17 + 0,81 = 1,98 ευρώ. Άρα το ελάχιστο ποσό που πρέπει να πληρωθεί είναι 2 ευρώ.

4. Δύο διακριτοί αριθμοί α και β επιλέγονται ανεξάρτητα και τυχαία από το σύνολο των πρώτων 20 θετικών ακεραίων. Ποια είναι η πιθανότητα η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους |α–β| να μην διαιρείται με το 3;

Α. 68%
Β. 70%
Γ. 73%
Δ. 77%

ΛΥΣΗ

Οποιοσδήποτε αριθμός θα μπορούσε να γραφτεί με τη μορφή 3κ , 3κ + 1 ή 3κ + 2.
Μόνο αν οι επιλεγμένοι αριθμοί είναι διαφορετικού τύπου, η παράσταση |a – b| δε θα διαιρείται με το 3.
Αριθμοί τύπου 3k --> 3, 6, 9, ... 18 --> Σύνολο 6 αριθμοί
Αριθμοί τύπου 3k + 1 --> 1, 4, 7, ... 19 --> Σύνολο 7 αριθμοί
Αριθμοί τύπου 3k + 2 --> 2, 5, 8, 11 ...20 -->Σύνολο 7 αριθμοί
Συνολικές πιθανές περιπτώσεις 20 * 19 = 380
Ευνοϊκές περιπτώσεις:
1) Επιλογή από τον τύπο 1 και τον τύπο 2 -> 2 * (6 * 7) = 84 περιπτώσεις.
2) Επιλογή από τον Τύπο 1 και τον Τύπο 3 -> 2 * (6 * 7) = 84 περιπτώσεις.

3) Επιλογή από τον Τύπο 2 και τον Τύπο 3: 2 * (7 * 7) = 98 περιπτώσεις.
Ως εκ τούτου, η απαιτούμενη πιθανότητα θα είναι (84 + 84 + 98) / 380 = 133/190 = 0,7

5. Ο Κώστας έχει δύο τράπουλες των 52 φύλλων η καθεμία, την Τράπουλα Τ1 και την Τράπουλα Τ2. Επιλέγει τυχαία 8 μαύρα φύλλα από την Τράπουλα Τ2, τα προσθέτει στην Τράπουλα Τ1 και ανακατεύει τα φύλλα καλά. Τώρα διαλέγει 1 φύλλο από τη νέα Τράπουλα Τ1 που έχει δημιουργηθεί. Εάν η πιθανότητα να διαλέξει έναν κόκκινο Άσο ή έναν Βασιλιά από τη νέα Τράπουλα Τ1 είναι μεγαλύτερη του 1/8, ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας να επιλέξει έναν μαύρο Βασιλιά ή έναν κόκκινο Βαλέ από τη νέα Τράπουλα Τ1 που έχει δημιουργηθεί;

Α. 8%
Β. 10%
Γ. 13%
Δ. 16%

ΛΥΣΗ

Έστω "k" ο αριθμός των μαύρων Βασιλιάδων που μπορεί να είναι μέρος των 8 μαύρων φύλλων που προστέθηκαν στην Τράπουλα Τ1.
Ο αριθμός των κόκκινων Άσων στη νέα τράπουλα παραμένει αμετάβλητος, δηλαδή 2.
Αριθμός φύλλων στη νέα τράπουλα = 52+8 = 60.
Αριθμός Βασιλιάδων στη νέα τράπουλα = 4+k (2 κόκκινοι Βασιλιάδες + 2 μαύροι Βασιλιάδες + Κ μαύροι Βασιλιάδες).
Η πιθανότητα να επιλέξουμε έναν κόκκινο Άσο ή έναν Βασιλιά είναι: 2/(52+8) + (4+k)/(52+8) = (6+k)/60.
Θεωρούμε, (6+k)/60 > 1/8 δηλ. k > 3/2 δηλ. k > 1.5
Αλλά, το k μπορεί να λάβει μόνο 3 τιμές (0 μαύροι Βασιλιάδες ή 1 μαύρος Βασιλιάς ή 2 μαύροι Βασιλιάδες). Έτσι, αφού k>1.5 => k=2.
Η ζητούμενη πιθανότητα ο Κώστας να επιλέξει έναν μαύρο Βασιλιά ή έναν κόκκινο Βαλέ από τη νέα Τράπουλα Τ1 μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:
Συνολικός αριθμός μαύρων Βασιλιάδων στη νέα Τράπουλα Τ1 --> 4 .
Συνολικός αριθμός των κόκκινων Βαλέδων στη νέα Τράπουλα Τ1 --> 2.
Άρα, 4/60 + 2/60 = 6/60 = 1/10.

6. Κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους, ο διευθυντής παραγωγής ενός εργοστασίου, στο τέλος κάθε μήνα, κατέγραφε τον αριθμό (σε χιλιάδες) των προϊόντων που παρήγαγε το εργοστάσιο, καθώς και το συνολικό κόστος παραγωγής (σε χιλιάδες ευρώ) αυτών των προϊόντων, δημιουργώντας τον παρακάτω πίνακα. Εάν η τιμή πώλησης κάθε μονάδας προϊόντος είναι 1,60 ευρώ, ο αριθμός των παραγόμενων προϊόντων όπου το συνολικό εκτιμώμενο κόστος παραγωγής ισούται με τα έσοδα από την πώληση αυτών, θα είναι περίπου:

Αριθμός προϊόντων	18	36	45	22	69	72	13	33	59	79	10	53
Κόστος παραγωγής	37	54	63	42	84	91	33	49	79	98	32	71

Α. 31.700 προϊόντα
Β. 33.600 προϊόντα
Γ. 35.200 προϊόντα

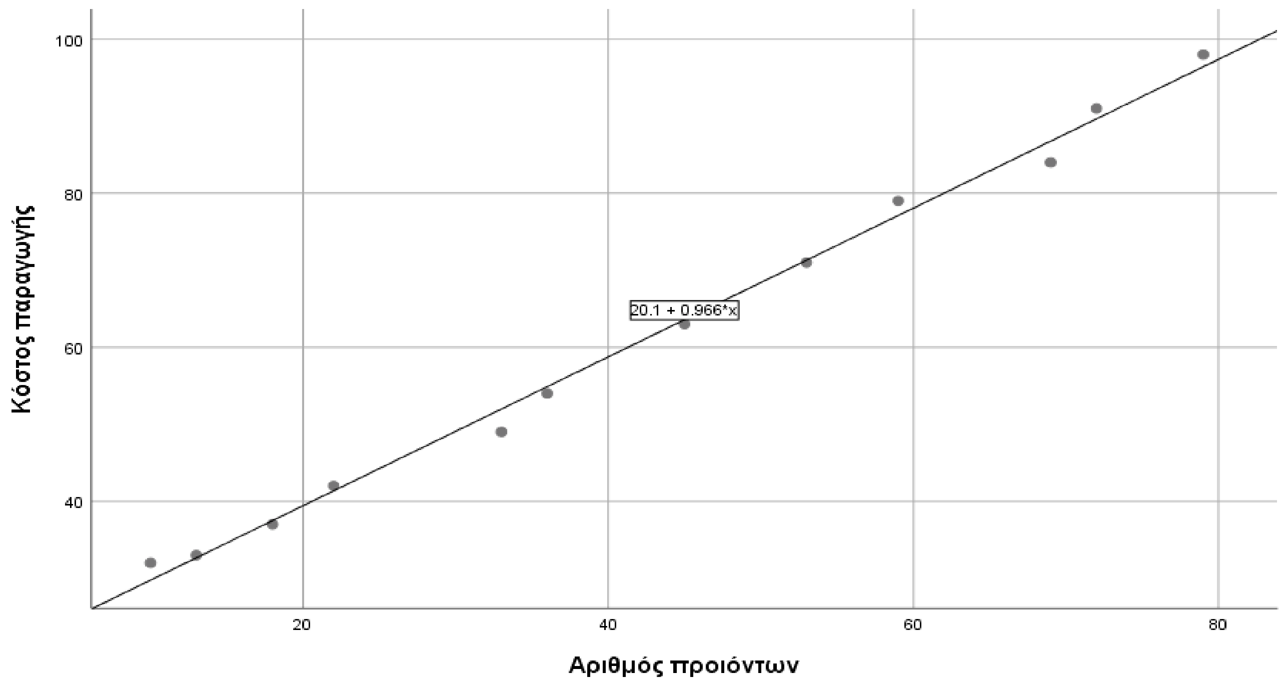
Δ. 36.300 προϊόντα

ΛΥΣΗ

Δημιουργώντας το διάγραμμα διασποράς παρατηρούμε ότι υπάρχει μια πολύ ισχυρή γραμμική θετική σχέση που συνδέει τον αριθμό των παραγόμενων προϊόντων και το κόστος παραγωγής αυτών.
Επομένως, μπορούμε να βρούμε την ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης. Το παρακάτω διάγραμμα διασποράς μας παρουσιάζει τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα καθώς και την ευθεία παλινδρόμησης που προκύπτει από αυτά.

Το εκτιμώμενο κόστος προκύπτει από την ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης:

Κόστος παραγωγής = 20,1 + 0,966 . (αριθμός παραγόμενων προϊόντων)



Έστω x : ο αριθμός σε χιλιάδες των παραγόμενων προϊόντων. Θα πρέπει : 20,1 + 0,966 . x = 1,6 . x => x = 31,7 . Συνεπώς , το εργοστάσιο θα πρέπει να παράξει 31.700 προϊόντα ώστε το εκτιμώμενο κόστος παραγωγής να είναι το ίδιο με τα έσοδα από την πώληση αυτής της παραγωγής.

7. Σε ένα κουτί υπάρχουν 99 σφαίρες αριθμημένες από το 1 έως το 99. Κάθε σφαίρα είναι βαμμένη με κόκκινο, μπλε ή πράσινο χρώμα με την εξής σειρά: η σφαίρα με τον αριθμό 1 είναι κόκκινη, η σφαίρα με τον αριθμό 2 είναι μπλε, η σφαίρα με τον αριθμό 3 είναι πράσινη, η σφαίρα με τον αριθμό 4 είναι κόκκινη, η σφαίρα με τον αριθμό 5 είναι μπλε κ.ο.κ., με τον ίδιο τρόπο πάντοτε. Εξάγουμε ταυτόχρονα δύο σφαίρες από το κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των αριθμών των δύο σφαιρών που εξάγονται να αντιστοιχεί σε σφαίρα με πράσινο χρώμα;

Διευκρίνιση: **Η φράση «το άθροισμα των αριθμών των δύο σφαιρών που εξάγονται να αντιστοιχεί σε σφαίρα με πράσινο χρώμα» σημαίνει ότι ο αριθμός που προκύπτει από το άθροισμα των δύο σφαιρών που εξάγονται, έχει την ίδια ιδιότητα με τους αριθμούς των σφαιρών με πράσινο χρώμα.**

Α. 20%
Β. 30%
Γ. 33,33%
Δ. 40%

ΛΥΣΗ

Δεδομένου ότι εξάγουμε δύο σφαίρες ταυτόχρονα, το πλήθος των ζευγών των σφαιρών που εξάγονται είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών των 99 ανά 2. Άρα:
$N(\Omega) = \binom{99}{2} = \frac{99!}{2!\cdot 97!} = \frac{98\cdot 99}{2} = 4.851$
Κάθε αριθμός ενός χρώματος είναι κατά 3 μονάδες μεγαλύτερος από τον προηγούμενο του ίδιου χρώματος. Συγκεκριμένα,

- οι κόκκινες σφαίρες έχουν τους αριθμούς 1, 4, 7, 10, …, 97 δηλαδή αριθμούς που αφήνουν υπόλοιπο 1 όταν διαιρεθούν με το 3. Επομένως, οι κόκκινες σφαίρες έχουν αριθμούς της μορφής 3κ + 1, κ φυσικός, 0 ≤ κ ≤ 32
- οι μπλε σφαίρες έχουν τους αριθμούς 2, 5, 8, 11, …, 98 που αφήνουν υπόλοιπο 2 όταν διαιρεθούν με το 3. Επομένως, οι μπλε σφαίρες έχουν αριθμούς της μορφής 3κ + 2, κ φυσικός, 0 ≤ κ ≤ 32
- και τέλος, οι πράσινες έχουν αριθμούς τα πολλαπλάσια του 3: 3, 6, 9, 12, …, 99, δηλαδή έχουν αριθμούς της μορφής 3κ, κ φυσικός, 1 ≤ κ ≤ 33.

Για να αντιστοιχεί σε σφαίρα με πράσινο χρώμα, το άθροισμα των δύο σφαιρών που εξάγονται θα πρέπει:

- να είναι η μία κόκκινη και η άλλη μπλε, γιατί

κόκκινη + μπλε = (3κ + 1) + (3λ + 2) = 3κ +3λ + 3 = 3(κ +λ + 1) = 3μ = πράσινη

Αυτό, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης μπορεί να γίνει με 33·33 = 1.089 τρόπους, δεδομένου ότι στο κουτί υπάρχουν 33 κόκκινες και 33 μπλε σφαίρες,
ή θα πρέπει

- να είναι και οι δύο σφαίρες πράσινες, γιατί

πράσινη + πράσινη = 3κ + 3λ = 3(κ +λ) = 3μ = πράσινη

Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{33}{2} = \frac{33!}{2!\cdot 31!} = \frac{32\cdot 33}{2} = 528$ τρόπους δεδομένου ότι στο κουτί υπάρχουν 33 πράσινες σφαίρες.
Ισχύει: N(A) = 1.089 + 528 = 1.617 και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1.617}{4.851} = 0{,}33$.

8. Η υψηλότερη θερμοκρασία μιας καλοκαιρινής ημέρας σε ένα ελληνικό νησί είναι πάντα μία από τις τρεις θερμοκρασίες: 24, 25 ή 26 βαθμοί Κελσίου. Εάν η πιθανότητα εμφάνισης κάθε θερμοκρασίας είναι ίδια, η πιθανότητα η διάμεσος υψηλή θερμοκρασία σε μια περίοδο τριών ημερών να είναι 25 βαθμοί Κελσίου είναι περίπου:

Α. 33,67%
Β. 48,15%
Γ. 53,33%
Δ. 75,44%

ΛΥΣΗ

Όταν μας ζητείται να βρούμε τη διάμεσο 3 αριθμών, τους τακτοποιούμε σε αύξουσα σειρά και μετά επιλέγουμε τον μεσαίο αριθμό.
Η διάμεση τιμή 25 προκύπτει όταν δημιουργούνται οι παρακάτω τριάδες θερμοκρασιών:
{25, 25, 25}
{25, 25, 26}
{24, 25, 25}
{24, 25, 26}
Περίπτωση 1: θερμοκρασίες {25, 25, 25}. Πιθανότητα : 1/3 * 1/3 * 1/3 = 1/27
Περίπτωση 2: θερμοκρασίες {25, 25, 26}. Πιθανότητα : 1/3 * 1/3 * 1/3 = 1/27. Υπάρχουν όμως και άλλοι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε θερμοκρασία 25 σε αυτή την τριάδα, π.χ. 26 την πρώτη ημέρα, 25 τις άλλες δύο. Οπότε ουσιαστικά αναζητούμε τον αριθμό των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τακτοποιήσουμε τις θερμοκρασίες 25, 25, 26 μεταξύ 3 ημερών έτσι ώστε να παίρνουμε διάμεσο τον αριθμό 25. Αυτό μπορεί να γίνει με 3!/2! = 3 τρόπους. Συνεπώς, η συνολική πιθανότητα θα είναι 1/27 * 3 = 1/9.
Ομοίως, η πιθανότητα να λάβουμε την τριάδα {24, 25, 25} είναι επίσης 1/9.
Η πιθανότητα να έχουμε {24, 25, 26} θα είναι 1/3 * 1/3 * 1/3 * 3! = 6/27.
Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι 1/27 + 1/9 + 1/9 + 6/27 = 13/27, δηλ. 48,15%.

9. Επιλέγουμε τυχαία έναν θετικό τριψήφιο αριθμό. Η πιθανότητα να αποτελείται από τρία διαφορετικά ψηφία και το ένα ψηφίο του να είναι ο μέσος όρος των άλλων δύο είναι περίπου:

Α. 11,33%
Β. 12,44%
Γ. 13,33%
Δ. 16,67%

ΛΥΣΗ

Έστω οι τρεις αριθμοί α, β, γ που δημιουργούν τον τριψήφιο θετικό αριθμό αβγ. Θα πρέπει να ισχύει ότι (α + β)/2 = γ.
Περίπτωση 1 :
Τα ψηφία α, β είναι άρτιοι αριθμοί. Η επιλογή μπορεί να γίνει με 2C5 = 10 τρόπους. Επειδή τα ψηφία είναι διαφορετικά, οι τρεις θέσεις μπορούν να καλυφθούν με 3! = 6 τρόπους. Συνολικά, επομένως, έχουμε 6 * 10 = 60 τρόπους. Όταν όμως το ψηφίο των εκατοντάδων γίνει 0 οι αριθμοί γίνονται διψήφιοι. Αυτό μπορεί να συμβεί με 4C1 * 2! = 8 τρόπους. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή θα έχουμε 60 – 8 = 52 αριθμούς.
Περίπτωση 2 :
Τα ψηφία α, β είναι περιττοί αριθμοί. Διαλέγουμε λοιπόν 2 περιττά ψηφία από τα πιθανά 5, δηλ. με 5C2=10 τρόπους. Καθώς τα ψηφία είναι διακριτά, κάθε σύνολο των α, β και γ μπορεί να ταξινομηθεί με 3! τρόπους. Σύνολο τρόπων = 10*3! = 60 αριθμοί. Επομένως, συνολικά θα έχουμε 60 + 52 = 112 αριθμούς.
Το πλήθος των θετικών τριψήφιων είναι 900 αριθμοί. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι p = 112/900 = 0,1244.

10. Δίνεται ο δειγματικός χώρος: Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5} για τον οποίο ισχύουν P(4) = 2P(2) = 6P(0) και P(5) = 2P(3) = 4P(1). Επίσης, για το ενδεχόμενο Α = {x ϵ Ω/ |2x - 9| < 3} ισχύει ότι P(A) = 7/12.
Έστω s^2 η διακύμανση των αριθμών 4λ -7, λ - 1, λ + 2, όπου λ ϵ Ω. Η πιθανότητα του ενδεχόμενου: Β = {λ ϵ Ω/ $s^2 \geq 6$} είναι περίπου:

Α. 66,67%

Β. 58,33%
Γ. 62,50%
Δ. 70,83%

ΛΥΣΗ

- Βρίσκουμε το ενδεχόμενο Α.

Α = {x ϵ Ω/ |2x - 9| < 3}
$|2x-9|<3$ ==> $-3<2x-9<3$ ==> $6<2x<12$ ==> $3<x<6$
Όμως $x \in \Omega$, άρα $x=4$ ή $x=5$ και Α = {4, 5}.

- Βρίσκουμε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω

P(4) = 2P(2) = 6P(0) ==> $\frac{P(4)}{6}=\frac{P(2)}{3}=P(0)=\mu.$
Άρα P(0) = μ, P(2) = 3μ, P(4) = 6μ
P(5) = 2P(3) =4P(1) ==> $\frac{P(5)}{4}=\frac{P(3)}{2}=P(1)=\nu$
Άρα P(1) = ν, P(3) = 2ν, P(5) = 4ν
Από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας ισχύουν:
$P(A)=P(4)+P(5)=6\mu+4\nu=\frac{7}{12}$ (1)
$P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=1$ ==>
$\mu+\nu+3\mu+2\nu+6\mu+4\nu=1$ ==>
$10\mu+7\nu=1$ (2)
Από τη λύση του συστήματος των (1), (2) προκύπτει $\mu=\frac{1}{24}\,\nu=\frac{2}{24}$.
Άρα $P(0)=\frac{1}{24}\,P(1)=\frac{2}{24}\,P(2)=\frac{3}{24}\,P(3)=\frac{4}{24}\,P(4)=\frac{6}{24}\,P(5)=\frac{8}{24}$

- Η μέση τιμή των αριθμών 4λ -7, λ - 1, λ + 2 είναι

$\overline{x}=\frac{(4\lambda-7)+(\lambda-1)+(\lambda+2)}{3}=\frac{6\lambda-6}{3}=2\lambda-2$
Η διακύμανση των αριθμών 4λ -7, λ - 1, λ + 2 είναι
$s^2=\frac{[(4\lambda-7)-(2\lambda-2)]^2+[(\lambda-1)-(2\lambda-2)]^2+[(\lambda+2)-(2\lambda-2)]^2}{3}=$
$=\frac{(2\lambda-5)^2+(-\lambda+1)^2+(-\lambda+4)^2}{3}=\frac{6\lambda^2-30\lambda+42}{3}=2\lambda^2-10\lambda+14$
$s^2\geq 6$ ==> $2\lambda^2-10\lambda+14\geq 6$ ==> $2\lambda^2-10\lambda+8\geq 0$ ==>
$\lambda^2-5\lambda+4\geq 0$ ==> λ ≤ 1 ή λ ≥ 4 και δεδομένου ότι λ ϵ Ω, λ ϵ B = {0, 1, 4, 5}
P(B) = $P(0)+P(1)+P(4)+P(5)=\frac{1}{24}+\frac{2}{24}+\frac{6}{24}+\frac{8}{24}=\frac{17}{24}$ = 70,83%

ΕΚΔΟΧΗ 2

1. Από μια κανονική τράπουλα 52 φύλλων χρησιμοποιούμε μόνο 16 φύλλα: 4 Άσους (A), 4 Βασιλιάδες (K), 4 Βασίλισσες (Q) και 4 Βαλέδες (J). Από τα 16 φύλλα, επιλέγουμε 4. Εάν θεωρήσουμε ότι κάθε Άσος βαθμολογείται με 4 πόντους, κάθε Βασιλιάς με 3 πόντους, κάθε Βασίλισσα με 2 πόντους και κάθε Βαλές με 1 πόντο, η πιθανότητα να πετύχουμε ακριβώς 13 πόντους είναι περίπου:

Α. 5%

Β. 7%
Γ. 10%
Δ. 12%

ΛΥΣΗ

Υπάρχουν
$\binom{16}{4} = \frac{16!}{4!\cdot 12!} = \frac{12!\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{4!\cdot 12!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1.820$
τρόποι για να επιλέξουμε 4 φύλλα από τα 16.
Οι τρόποι για να κερδίσουμε 13 πόντους είναι:
AAAJ: $\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{1} = 4\cdot 4 = 16$ τρόποι,
AAKQ: $\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1} = 6\cdot 4\cdot 4 = 96$ τρόποι,
AKKK: $\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{3} = 4\cdot 4 = 16$ τρόποι.
Συνολικά κερδίζουμε 13 πόντους με $16 + 96 + 16 = 128$ τρόπους.
Η ζητούμενη πιθανότητα είναι: P(A) = 128/1.820 = 0,07 = 7% .

2. Το βάρος ενός εβδομαδιαίου περιοδικού ακολουθεί περίπου την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ. Για την ευκολότερη μελέτη της διαδικασίας, ένας στατιστικός μελετά τις παρατηρήσεις που προκύπτουν, εάν από το βάρος του κάθε περιοδικού αφαιρεθεί η μέση τιμή και το αποτέλεσμα διαιρεθεί με την τυπική απόκλιση. Οι νέες τιμές ακολουθούν επίσης την κανονική κατανομή. Πριν γίνει ο μετασχηματισμός, ο στατιστικός είχε παρατηρήσει ότι το 2,5% των περιοδικών είχαν βάρος πάνω από 85 γραμμάρια, ενώ το 16% αυτών είχαν βάρος λιγότερο από 75 γραμμάρια. Την προηγούμενη εβδομάδα, ο εκδοτικός οίκος τύπωσε 2.800 περιοδικά. Ο αριθμός των περιοδικών που είχαν βάρος πάνω από 83,325 γραμμάρια ήταν:

Α. 209
Β. 213
Γ. 268
Δ. 259

ΛΥΣΗ

Από τη θεωρία ισχύουν τα εξής.
Σε καθένα από τα διαστήματα $(\overline{x} - s, \overline{x})$ και $(\overline{x}, \overline{x} + s)$ βρίσκεται το 34% των παρατηρήσεων.
Σε καθένα από τα διαστήματα $(\overline{x} - 2s, \overline{x} - s)$ και $(\overline{x} + s, \overline{x} + 2s)$ βρίσκεται το 13,5% των παρατηρήσεων.
Σε καθένα από τα διαστήματα $(\overline{x} - 3s, \overline{x} - 2s)$ και $(\overline{x} + 2s, \overline{x} + 3s)$ βρίσκεται το 2,35% των παρατηρήσεων.
Σε καθένα από τα δύο ακραία διαστήματα που περισσεύουν βρίσκεται το 0,15% των παρατηρήσεων.

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:
Το 2,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται πάνω από το $\overline{x} + 2s$ ή κάτω από το $\overline{x} - 2s$
Το 16% των παρατηρήσεων βρίσκεται πάνω από το $\overline{x} + s$ ή κάτω από το $\overline{x} - s$
Επομένως, σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης ισχύουν τα εξής:

$$\overline{x} + 2s = 85$$

και $\overline{x} - s = 75$

Άρα, $\overline{x} = 78{,}33$ και $s = 3{,}33$.

$\overline{x}$ 3s	$\overline{x}$ − 2s	$\overline{x}$ − s	$\overline{x}$	$\overline{x}$ +s	$\overline{x}$ +2s	$\overline{x}$ + 3s
68,34	71,67	75	**78.33**	81,66	84,99	88,32

Παρατηρούμε ότι $\frac{84{,}99+81{,}66}{2} = 83{,}325$

Δηλαδή το **83,325 βρίσκεται ακριβώς στη μέση του διαστήματος** ($\overline{x} + s$, $\overline{x}$ + 2s) στο οποίο βρίσκεται το 13,5 των παρατηρήσεων (περιοδικών).

Άρα πάνω από το **83,325 βρίσκεται το** $\frac{13{,}5}{2} + 2{,}35 + 0{,}15$ = 9,25% των περιοδικών.

Επομένως, έχουμε

2.800*0,0925 = 259 περιοδικά με **βάρος πάνω από 83,325 γραμμάρια.**

Υποσημείωση: Η συγκεκριμένη άσκηση είναι εντός ύλης και λύνεται σύμφωνα με τη θεωρία του εγκεκριμένου από το Υπουργείο βιβλίου της Γ! Λυκείου " Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής". Συγκεκριμένα βασίζεται στη θεωρία που αναπτύσσεται :
1. Στην παράγραφο "Μέτρα θέσης" , στην υποπαράγραφο "α) Μέση Τιμή"
2. Στην παράγραφο "Μέτρα Διασποράς", στην υποπαράγραφο "δ) Τυπική απόκλιση"

3. Ο Γιάννης παίζει ένα παιχνίδι στο οποίο ξεκινά με 2 ευρώ. Κάθε παιχνίδι έχει δύο γύρους. Σε κάθε γύρο, στο χρηματικό ποσό με το οποίο ξεκινά ο γύρος είτε προστίθεται τυχαία 1 ευρώ ή 0 ευρώ, είτε το χρηματικό ποσό πολλαπλασιάζεται τυχαία με το 1 ή το 0. Η επιλογή της αριθμητικής πράξης και του αριθμού είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους από γύρο σε γύρο. Εάν ο Γιάννης παίξει επανειλημμένα αυτό το παιχνίδι των δύο γύρων, το μακροπρόθεσμο μέσο χρηματικό ποσό που θα του απομείνει στο τέλος του παιχνιδιού θα είναι:

Α. 0,50 ευρώ
Β. 1,05 ευρώ
Γ. 1,56 ευρώ
Δ. 2,35 ευρώ

ΛΥΣΗ

Σε κάθε γύρο, υπάρχουν ίσες πιθανότητες να εκτελεστεί μία από τις τέσσερις διαδικασίες με το χρηματικό ποσό με το οποίο ο Γιάννης ξεκινά τον γύρο:
x 1
+ 1
x 0
+ 0
Ας υποθέσουμε ότι ο Γιάννης ξεκινά τον πρώτο γύρο με 2 ευρώ. Στο τέλος του πρώτου γύρου θα ισχύει μία από τις τέσσερις περιπτώσεις.
1η περίπτωση 2 * 1 = 2 ευρώ
2η περίπτωση 2 + 1 = 3 ευρώ
3η περίπτωση 2 * 0 = 0 ευρώ
4η περίπτωση 2 + 0 = 2 ευρώ
Επομένως, σίγουρα θα ξεκινήσει τον δεύτερο γύρο με 2, 3, 0 ή 2 ευρώ.
Άρα, στο τέλος του δεύτερου γύρου, θα ισχύει μία από τις εξής περιπτώσεις.
1η περίπτωση (ξεκινώντας με 2 ευρώ) 2, 3, 0, 2 ευρώ
2η περίπτωση (ξεκινώντας με 3 ευρώ) 3, 4, 0, 3 ευρώ

3η περίπτωση (ξεκινώντας με 0 ευρώ) 0, 1, 0, 0 ευρώ
4η περίπτωση (ξεκινώντας με 2 ευρώ) 2, 3, 0, 2 ευρώ
Κάθε ένα από αυτά τα 16 αποτελέσματα έχει ίσες πιθανότητες να πραγματοποιηθεί.
Άρα καταλήγουμε:
0 ευρώ με πιθανότητα 6/16
1 ευρώ με πιθανότητα 1/16
2 ευρώ με πιθανότητα 4/16 = 1/4
3 ευρώ με πιθανότητα 4/16 = 1/4
4 ευρώ με πιθανότητα 1/16
Συνεπώς, το μέσο χρηματικό ποσό που θα μείνει στον Γιάννη θα είναι (0*6/16) + (1*1/16) + (2*1/4) + (3*1/4) + (4*1/16) = 25/16 = 1,56 ευρώ.

4. Σε μια λίστα επτά ακεραίων, ένας ακέραιος, που συμβολίζεται ως x, είναι άγνωστος. Οι άλλοι έξι ακέραιοι είναι οι αριθμοί 20, 4, 10, 4, 8 και 4. Εάν ο μέσος όρος, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή αυτών των επτά ακεραίων διαταχθούν σε αύξουσα σειρά, σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο. Το άθροισμα όλων των δυνατών τιμών του x είναι:

Α. 26
Β. 32
Γ. 34
Δ. 40

ΛΥΣΗ

Εάν διατάξουμε τους γνωστούς αριθμούς σε αύξουσα σειρά θα έχουμε : 4, 4, 4, 8, 10, 20. Κάπου θα βρίσκεται και ο αριθμός x. Η επικρατούσα τιμή θα είναι 4, ανεξάρτητα από την τιμή του x. Η μέση τιμή θα είναι (50 + x)/7.

Περίπτωση 1: $x \leq 4$
Σε αυτή την περίπτωση, οι αριθμοί διατάσσονται ως: x, 4, 4, 4, 8, 10, 20. Η επικρατούσα τιμή θα είναι 4, η διάμεσος θα είναι 4 και η μέση τιμή θα είναι (50 + x)/7. Έστω και εάν οι τρεις αυτοί αριθμοί διαταχθούν σε αύξουσα σειρά, δε σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο.

Περίπτωση 2: $4 < x < 8$.
Σε αυτή την περίπτωση, οι αριθμοί διατάσσονται ως: 4, 4, 4, x, 8, 10, 20. Η επικρατούσα τιμή θα είναι 4, αλλά η διάμεσος μπορεί να είναι 5, 6 ή 7.
Εάν x = 5 , τότε η διάμεσος είναι 5 και η μέση τιμή είναι 55/7.
Εάν x = 6 , τότε η διάμεσος είναι 6 και η μέση τιμή είναι 56/7 = 8. Οι αριθμοί 4, 6, 8 είναι αριθμητική πρόοδος με ω = 2.
Εάν x = 7 , τότε η διάμεσος είναι 7 και η μέση τιμή είναι 57/7.

Περίπτωση 3: $x \geq 8$.
Σε αυτή την περίπτωση, οι αριθμοί διατάσσονται ως: 4, 4, 4, 8, 10, 20 και ο x κάπου από 8 και πάνω. Η επικρατούσα τιμή θα είναι 4, η διάμεσος θα είναι 8 και η μέση τιμή θα πρέπει να είναι 12. Η μέση τιμή γίνεται 12 όταν (50 + x)/7 = 12 => x = 34.

Άρα, το άθροισμα όλων των δυνατών τιμών του x θα είναι 6 + 34 = 40.

Υποσημείωση: Η περίπτωση της τιμής x = -22 που οδηγεί σε σταθερή αριθμητική πρόοδο στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει να απορριφθεί διότι ο μέσος όρος , η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή ταυτίζονται. Ως συνέπεια οι τρεις τιμές δεν μπορούν να διαταχθούν σε αύξουσα σειρά. Η περίπτωση αυτή δεν συμβαδίζει με τα δεδομένα του προβλήματος.

5. Μια τσάντα περιέχει 50 όμοια σφαιρίδια αριθμημένα με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4.....50. Πέντε από αυτά κληρώνονται τυχαία. Η πιθανότητα η διάμεσος τιμή των πέντε επιλεγμένων σφαιριδίων να είναι ο αριθμός 30 είναι:

Α. 3,64%
Β. 5,12%
Γ. 7,46%
Δ. 9,37%

ΛΥΣΗ

Πρέπει να διαλέξουμε τους σωστούς πέντε αριθμούς. Για να βεβαιωθούμε ότι το σφαιρίδιο με τον αριθμό 30 βρίσκεται ακριβώς στη μέση, 2 σφαιρίδια θα πρέπει να έχουν αριθμό μικρότερο από 30 και 2 σφαιρίδια θα πρέπει να έχουν αριθμό μεγαλύτερο από 30. Οι δύο μικρότεροι αριθμοί μπορούν να επιλεγούν με 29C2 τρόπους. Οι δύο μεγαλύτεροι αριθμοί μπορούν να επιλεγούν με επίσης 20C2 τρόπους. Οι 5 αριθμοί μπορούν να επιλεγούν από τους 50 με 50C5 τρόπους. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι p = (29C2 * 20C2) / 50C5 = 551/15134 = 0,0364.

6. Μια ομάδα πέντε ατόμων μπαίνει ταυτόχρονα σε ένα ασανσέρ που βρίσκεται στο ισόγειο ενός δεκαώροφου κτηρίου. Τα άτομα επιλέγουν τους ορόφους εξόδου τους ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Έστω ότι η πιθανότητα εξόδου κάθε ατόμου από το ασανσέρ στον 10^{ο} όροφο είναι 1/6 και η αντίστοιχη πιθανότητα για κάθε έναν από τους υπόλοιπους ορόφους είναι p. Η πιθανότητα κάθε άτομο να βγει από το ασανσέρ σε διαφορετικό όροφο είναι περίπου:

Α. 13,65%
Β. 23,45%
Γ. 28,81%
Δ. 33,33%

ΛΥΣΗ

Υπολογίζουμε την πιθανότητα εξόδου σε κάθε όροφο. Θα ισχύει ότι :
(1/6) + 9 * (1/p) = 1 => p = 54/5 . Άρα, η πιθανότητα εξόδου είναι στον δέκατο 1/6 και σε κάθε έναν από τους υπόλοιπους 9 ορόφους η πιθανότητα εξόδου είναι 5/54.
Ο αριθμός των περιπτώσεων που τα πέντε άτομα πηγαίνουν όλα σε διαφορετικούς ορόφους και ο όροφος 10 δεν επιλέγεται ως όροφος εξόδου είναι ίσος με 9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 15.120 τρόποι, ενώ ο αριθμός των περιπτώσεων που τα πέντε άτομα πηγαίνουν όλα σε διαφορετικούς ορόφους και ο όροφος 10 επιλέγεται ως όροφος εξόδου είναι 5C1 * 9 * 8 * 7 * 6 = 15.120 τρόποι. Συνεπώς , η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:
15120 * $(5/54)^5$ + 15120 * (1/6) * $(5/54)^4$ = 0,28813 περίπου.

7. Θεωρούμε το σύνολο S = {2, 4, 6, 8, x, y} με μοναδικά και διακριτά στοιχεία. Αν x και y είναι και οι δύο πρώτοι αριθμοί του διαστήματος (0,40), ποια/ποιες από τις παρακάτω προτάσεις θα ΠΡΕΠΕΙ να είναι αληθής/αληθείς;

I. Το μέγιστο δυνατό εύρος του συνόλου S είναι μεγαλύτερο από 33.
II. Η διάμεσος δεν μπορεί ποτέ να είναι άρτιος αριθμός.

III. Αν y = 37, ο μέσος όρος του συνόλου θα είναι μεγαλύτερος από τη διάμεσο.

Α. Η Ι
Β. Οι Ι και ΙΙ
Γ. Οι Ι, ΙΙ και ΙΙΙ
Δ. Η ΙΙΙ

ΛΥΣΗ

Έστω το σύνολο S = {2, 4, 6, 8, x, y}, όπου x και y είναι και οι δύο πρώτοι αριθμοί με 0 < x < 40 και 0 < y < 40.
I. Ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός μικρότερος του 40 είναι το 37. Για να αποκτήσουμε το μέγιστο δυνατό εύρος είτε το x είτε το y θα πρέπει να είναι 37. Τότε το εύρος θα είναι 37-2 = 35 και η πρόταση είναι αληθής.
II. Αν x και y είναι πρώτοι αριθμοί μεγαλύτεροι από 8, τότε η διάμεσος θα είναι (6+8)/2 = 7.
Εάν τα x και y είναι 3 και 5, τότε έχουμε το σύνολο S = {2,3,4,5,6,8} και η διάμεσος είναι (4 + 5)/2 = 9/2.
Αν x = 3 , τότε το σύνολο είναι S = { 2,3,4,6,8,y} και η διάμεσος είναι (4 + 6)/2 = 5.
Αν x = 5 , τότε το σύνολο είναι S = { 2,4,5,6,8,y} και η διάμεσος είναι (5 + 6)/2 = 11/2.
Αν x = 7, τότε το σύνολο είναι S ={ 2,4,6,7,8,y} και η διάμεσος είναι (6 + 7) = 13/2.
Άρα, η διάμεσος θα είναι είτε περιττός αριθμός είτε δεκαδικός και η πρόταση είναι αληθής
III. Το σύνολο γίνεται S = {2, 4, 6, 8, x, 37}. Η διάμεσος θα λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν x>8 και θα είναι διάμεσος = 7, αλλά τότε ο μέσος όρος θα είναι μεγαλύτερος από 10 και η πρόταση θα είναι επίσης αληθής.

8. Ένας πίνακας 3×3 συμπληρώνεται τυχαία με τους ακέραιους αριθμούς από το 1 έως το 9, με καθέναν από αυτούς τους ακέραιους αριθμούς να συμπεριλαμβάνεται μία φορά. Η πιθανότητα καθένα από τα αθροίσματα των γραμμών να είναι περιττό και καθένα από τα αθροίσματα των στηλών να είναι περιττό είναι περίπου:

Α. 5%
Β. 7%
Γ. 9%
Δ. 11%

ΛΥΣΗ

Υπάρχουν 9! τρόποι για να τοποθετηθούν στον 3×3 πίνακα οι 9 αριθμοί.
Οι πέντε περιττοί ακέραιοι 1, 3, 5, 7, 9 θα πρέπει να τοποθετηθούν έτσι ώστε μία γραμμή να έχει τρεις από αυτούς και μία στήλη να έχει τρεις από αυτούς. Υπάρχουν 3*3 = 9 τρόποι για να επιλεγεί το ζεύγος (γραμμή, στήλη), ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη του ζεύγους να έχει τρεις περιττούς αριθμούς. Μόλις γίνει αυτή η επιλογή, υπάρχουν 5! τρόποι τοποθέτησης των περιττών στη γραμμή και τη στήλη και 4! τρόποι των υπολοίπων 4 άρτιων στις υπόλοιπες θέσεις. Επομένως υπάρχουν 9*5!*4! τρόποι τοποθέτησης των ακεραίων.
Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι 9*5!*4! / 9! = 1/14.

9. Ένας καθηγητής Στατιστικής του Πανεπιστημίου Αθηνών επί επτά συνεχόμενα πρωινά κατέγραψε τον συνολικό χρόνο (y_i), σε λεπτά, που χρειάστηκε να οδηγήσει φεύγοντας (x_i) λεπτά μετά τις 7:00 π.μ. από το σπίτι του, ώστε να φτάσει στην Πανεπιστημιούπολη Ζωγράφου, δημιουργώντας τον παρακάτω πίνακα:

x_i	0	10	20	30	40	50	60

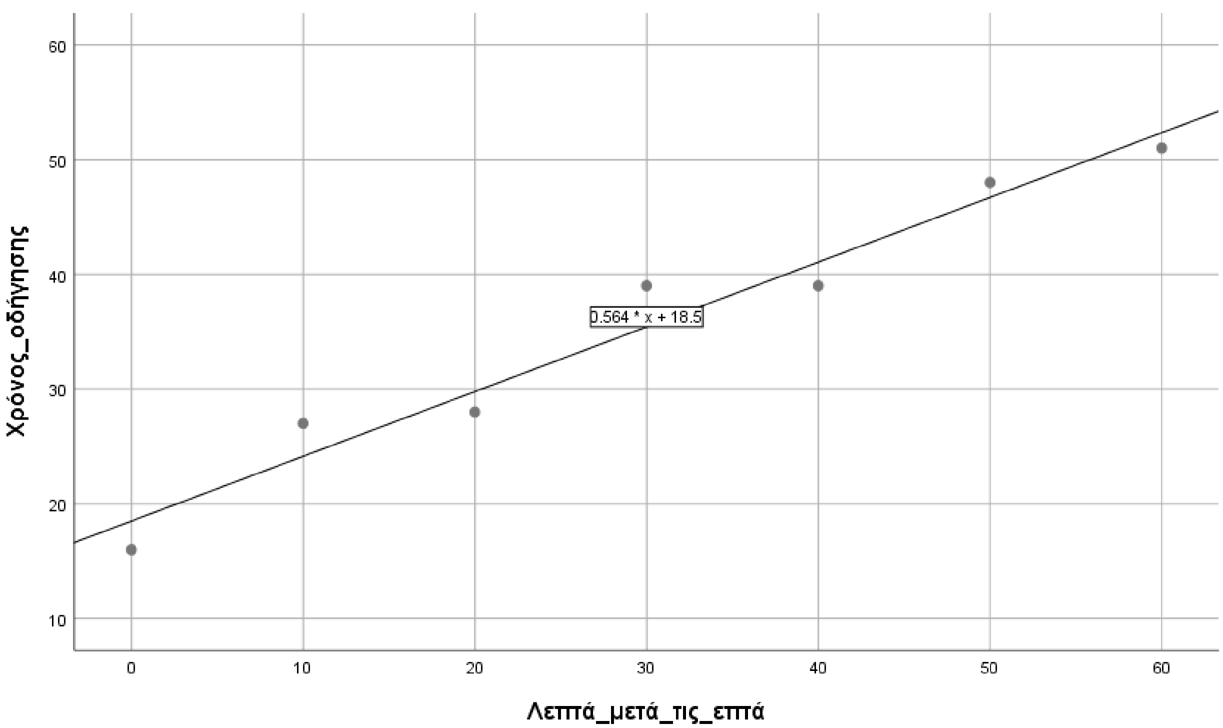
y_i	**16**	**27**	**28**	**39**	**39**	**48**	**51**

Δεδομένου ότι το μάθημά του μία συγκεκριμένη ημέρα ξεκινά στις 8:40 π.μ., πότε, το αργότερο, θα πρέπει ο καθηγητής να φύγει από το σπίτι του, ώστε να προλάβει να βρίσκεται στην τάξη την παραπάνω ώρα;

Α. 7:38 π.μ.
Β. 7:52 π.μ.
Γ. 7:58 π.μ.
Δ. 8:00 π.μ.

ΛΥΣΗ

Δημιουργώντας το διάγραμμα διασποράς, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια πολύ ισχυρή γραμμική θετική σχέση που συνδέει τις δύο μεταβλητές. Μπορούμε επομένως να βρούμε την ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στη X. Το παρακάτω διάγραμμα διασποράς μας παρουσιάζει τη γραφική απεικόνιση των παραπάνω δεδομένων και την ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης που αντιστοιχεί σε αυτά.



Η ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης είναι η $y = 18{,}5 + 0{,}564x$

Ο χρόνος από τις 7:00 π.μ. έως τις 8:40 π.μ. είναι 100 λεπτά. Έστω η τυχαία μεταβλητή Z : Διαθέσιμος χρόνος – χρόνος οδήγησης . Ισχύει τότε ότι :

$Z = (100 - x) - (18{,}5 - 0{,}564x) = 81{,}5 - 1{,}564x$.

Για Z = 0 => 81,5 – 1,564x = 0 => x = 52,11 , δηλ. 52 λεπτά. Άρα θα πρέπει να φύγει από το σπίτι του το αργότερο στις 7:52 π.μ.

10. Θεωρούμε τους φυσικούς αριθμούς του διαστήματος [200,300]. Επιλέγουμε στην τύχη έναν αριθμό ν από το παραπάνω διάστημα. Η πιθανότητα ο αριθμός αυτός να έχει ακριβώς τέσσερις διαφορετικούς θετικούς διαιρέτες που το άθροισμά τους να είναι 320 είναι περίπου:

Α. 0,99%
Β. 1,13%
Γ. 2,33%
Δ. 3,67%

ΛΥΣΗ

Έστω δ_1 , δ_2 , δ_3 , δ_4 οι τέσσερις διαφορετικοί διαιρέτες με $\delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \delta_4$. Θα ισχύει ότι :
$\delta_1 = 1$, $\delta_4 = \nu$ και $\delta_2 . \delta_3 = \nu$.
Επομένως, έχουμε :
$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 320 \Rightarrow 1 + \delta_2 + \delta_3 + \nu = 320 \Rightarrow 1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_2\,\delta_3 = 320 \Rightarrow$
$1 + \delta_2 + \delta_3(1 + \delta_2) = 320 \Rightarrow (1 + \delta_2)(1 + \delta_3) = 320$.
Αλλά $1 = \delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \delta_4 \Rightarrow 2 < 1 + \delta_2 < 1 + \delta_3$.
και επειδή οι δ_2 και δ_3 είναι φυσικοί αριθμοί, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $1 + \delta_2 = 4$, $1 + \delta_3 = 80$. Άρα $\delta_2 = 3$, $\delta_3 = 79$, οπότε είναι ν = 3* 79 = 237.
- $1 + \delta_2 = 5$, $1 + \delta_3 = 64$. Άρα $\delta_2 = 4$, $\delta_3 = 63$, απορρίπτονται, αφού ο $\nu = \delta_2 * \delta_3 = 252$ έχει και άλλους διαιρέτες: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 21, 28, 36, 42, 63, 84, 126, 252.
- $1 + \delta_2 = 8$, $1 + \delta_3 = 40$. Άρα $\delta_2 = 7$, $\delta_3 = 39$, απορρίπτονται, αφού ο $\nu = \delta_2 * \delta_3 = 273$ έχει και άλλους διαιρέτες: 1, 3, 7, 13, 21, 39, 91, 273.
- $1 + \delta_2 = 10$, $1 + \delta_3 = 32$. Άρα $\delta_2 = 9$, $\delta_3 = 31$, απορρίπτονται, αφού ο $\nu = \delta_2 * \delta_3 = 279$ έχει και άλλους διαιρέτες: 1, 3, 9, 31, 93, 279
- $1 + \delta_2 = 16$, $1 + \delta_3 = 20$. Άρα $d_2 = 15$, $d_3 = 19$, απορρίπτονται, αφού ο $\nu = \delta_2 * \delta_3 = 285$ έχει και άλλους διαιρέτες: 1, 3, 5, 15, 19, 57, 95, 285

Τελικά, ο αριθμός που ικανοποιεί τις αρχικές υποθέσεις είναι ο 237. Έχουμε:
N(A) = 1, N(Ω) = 101, άρα P(A) = 0,99%

ΕΚΔΟΧΗ 3

1. Οι ακέραιοι α, β, γ και δ, όχι απαραίτητα μοναδικοί, επιλέγονται ανεξάρτητα και τυχαία από το σύνολο των ακέραιων αριθμών του διαστήματος [0,2007]. Η πιθανότητα η παράσταση (αδ – βγ) να είναι άρτιος αριθμός είναι περίπου:

Α. 42,86%
Β. 77,78%
Γ. 62,50%
Δ. 84,21%

ΛΥΣΗ

Οι μισοί αριθμοί του διαστήματος [0,2007] είναι περιττοί και οι άλλοι μισοί άρτιοι.

Για να είναι η διαφορά δύο ακεραίων περιττός αριθμός θα πρέπει να έχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις ΠΕΡΙΤΤΟΣ – ΑΡΤΙΟΣ ή ΑΡΤΙΟΣ – ΠΕΡΙΤΤΟΣ.

Περίπτωση 1:
ΠΕΡΙΤΤΟΣ – ΑΡΤΙΟΣ. αδ - βγ = περιττός*περιττός - άρτιος*άρτιος **ή** περιττός*περιττός - περιττός*άρτιος **ή** περιττός*περιττός - άρτιος*περιττός. Σύνολο, τρεις περιπτώσεις. Η πιθανότητα κάθε μιας περίπτωσης είναι $1/2^4$ και η πιθανότητα των 3 περιπτώσεων είναι $3/2^4$.

Περίπτωση 2:
ΑΡΤΙΟΣ – ΠΕΡΙΤΤΟΣ. Ομοίως η πιθανότητα είναι $3/2^4$.
Τελικά, P(αδ – βγ άρτιος) = 1 - P(αδ – βγ περιττός) = 1 - $(3/2^4 + 3/2^4)$ = 10/16 = 5/8 = 0,625.

2. Η μηχανή παραγωγής ενός εργοστασίου είναι ασφαλισμένη για πρόωρη βλάβη. Η διάρκεια ζωής της μηχανής ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 4 έτη και τυπική απόκλιση 1 έτος. Η ασφαλιστική εταιρία θα πληρώσει α ευρώ για την επισκευή της μηχανής, εάν υπάρξει βλάβη κατά τη διάρκεια των 5 πρώτων ετών λειτουργίας της μηχανής και (α/2) ευρώ για την επισκευή πιθανής βλάβης κατά τα επόμενα 2 έτη λειτουργίας της. Εάν υπάρξει βλάβη στη συνέχεια, τότε η ασφαλιστική εταιρία δε θα πληρώσει τίποτα. Η τιμή του α ώστε η μέση αξία της πληρωμής να είναι 50 ευρώ θα πρέπει να είναι περίπου:

Α. 54,39 ευρώ
Β. 58,33 ευρώ
Γ. 69,19 ευρώ
Δ. 73,16 ευρώ

ΛΥΣΗ

Έστω η τυχαία μεταβλητή Χ : Η διάρκεια ζωής της μηχανής σε έτη. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος και τη βασική ιδιότητα της κανονικής κατανομής, θα ισχύει ότι :
Το 68% των παρατηρήσεων θα βρίσκεται στο διάστημα (3,5).
Το 95% των παρατηρήσεων θα βρίσκεται στο διάστημα (2,6).
Το 99,7% των παρατηρήσεων θα βρίσκεται στο διάστημα (1,7).
Η αναμενόμενη αξία πληρωμής θα είναι :
α . P ($X \leq 5$) + (½) * α * P ($5 \leq X \leq 7$) = 50. Από ένα απλό σχήμα διαπιστώνουμε ότι P ($X \leq 5$) = 0,84 και P ($5 \leq X \leq 7$) = (0,997/2) – 0,34 = 0,1585. Αντικαθιστώντας στην αρχική μας σχέση βρίσκουμε ότι α = 54,39 ευρώ.

Υποσημείωση: Η συγκεκριμένη άσκηση είναι εντός ύλης και λύνεται σύμφωνα με τη θεωρία του εγκεκριμένου από το Υπουργείο βιβλίου της Γ! Λυκείου " Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής". Συγκεκριμένα βασίζεται στη θεωρία που αναπτύσσεται :
1. Στην παράγραφο "Μέτρα θέσης" , στην υποπαράγραφο "α) Μέση Τιμή"
2. Στην παράγραφο "Μέτρα Διασποράς", στην υποπαράγραφο "δ) Τυπική απόκλιση"

3. Κάθε εβδομάδα, ένα μανάβης έχει από 5 έως και 8 πελάτες που ζητούν να αγοράσουν μία κολοκύθα, εφόσον του έχουν μείνει απούλητες. Η πιθανότητα ο μανάβης να έχει x πελάτες δίνεται από τον παρακάτω μαθηματικό τύπο :

$$P(x) = (9 - x)/10 , x = 5, 6, 7, 8.$$

Στην αρχή της εβδομάδας ο μανάβης αγοράζει κολοκύθες προς 2 ευρώ τη μία, ενώ κατά τη διάρκεια της εβδομάδας τις πουλά προς 4 ευρώ τη μία. Στο τέλος της εβδομάδας ο μανάβης πετά όσες κολοκύθες του έχουν απομείνει απούλητες. Εάν ο μανάβης θέλει να μεγιστοποιήσει το καθαρό κέρδος του, θα πρέπει να αγοράσει στην αρχή της εβδομάδας:

Α. 5 κολοκύθες
Β. 6 κολοκύθες
Γ. 7 κολοκύθες
Δ. 8 κολοκύθες

ΛΥΣΗ

Ο μανάβης έχει 2 ευρώ κέρδος για κάθε κολοκύθα που αγοράζει και στη συνέχεια πουλά και -2 ευρώ κέρδος για κάθε κολοκύθα που αγοράζει και στη συνέχεια δεν πουλά. Έστω Κ το κέρδος του μανάβη. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1

Ο μανάβης αγοράζει 8 κολοκύθες. Τότε θα ισχύει ότι :

Κολοκύθες που πουλά	8	7	6	5
Κέρδος	8*2 = 16	7*2 -1*2 = 12	6*2 - 2*2 = 8	5*2 - 3*2 = 4
Πιθανότητα	1/10	2/10	3/10	4/10

Το μέσο κέρδος του θα είναι Κ = (1/10) * 16 + (2/10) * 12 + (3/10) * 8 + (4/10) * 4 = 8 ευρώ.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2

Ο μανάβης αγοράζει 7 κολοκύθες. Τότε θα ισχύει ότι :

Κολοκύθες που πουλά	7	6	5
Κέρδος	7*2 = 14	6*2 -1*2 = 10	5*2 - 2*2 = 6
Πιθανότητα	3/10	3/10	4/10

Το μέσο κέρδος του θα είναι Κ = (3/10) * 14 + (3/10) * 10 + (4/10) * 6 = 9,6 ευρώ.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 3

Ο μανάβης αγοράζει 6 κολοκύθες. Τότε θα ισχύει ότι :

Κολοκύθες που πουλά	6	5

Κέρδος	6*2 = 12	5*2 -1*2 = 8
Πιθανότητα	6/10	4/10

Το μέσο κέρδος του θα είναι K = (6/10) * 12 + (4/10) * 8 = 10,4 ευρώ.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 4

Ο μανάβης αγοράζει 5 κολοκύθες. Τότε θα ισχύει ότι :

K = 5 * 2 = 10 ευρώ.

Παρατηρούμε ότι ο μανάβης μεγιστοποιεί το καθαρό του κέρδος, όταν αγοράζει 6 κολοκύθες.

4. Μια παρέα πέντε ατόμων συνεισέφερε διαφορετικό ποσό στον συνολικό λογαριασμό εστιατορίου. Η μέση συνεισφορά των πέντε ατόμων ήταν 64 ευρώ. Το άτομο με τη 2η μεγαλύτερη συνεισφορά κατέβαλε 124 ευρώ και η μέση συνεισφορά των δύο ατόμων με τη μικρότερη συνεισφορά ήταν 23 ευρώ. Ποιο είναι το πιθανό μέγιστο ποσό που πλήρωσε κάποιο από τα πέντε άτομα, εάν τα ποσά που πληρώθηκαν ήταν όλα ακέραιοι αριθμοί διαφορετικοί μεταξύ τους;

Α. 125
Β. 127
Γ. 128
Δ. 130

ΛΥΣΗ

Κάθε άτομο πλήρωσε ένα διαφορετικό ακέραιο ποσό στον συνολικό λογαριασμό. Έστω Α, Β, Γ, Δ, Ε τα ποσά που πλήρωσαν οι πέντε φίλοι με Α < Β < Γ < Δ < Ε. Δεδομένου ότι ο μέσος όρος είναι 64 ευρώ, το σύνολο του λογαριασμού ήταν 5 * 64 = 320 ευρώ. Το άτομο που πλήρωσε το 2ο υψηλότερο ποσό, ο Δ, πλήρωσε 124 ευρώ και, αφού ο μέσος όρος των 2 φίλων που πλήρωσαν τα λιγότερα είναι 23 ευρώ ο καθένας , σημαίνει ότι ο Α και ο Β μαζί πλήρωσαν 46 ευρώ. Για να μεγιστοποιήσουμε το ποσό που πληρώνει ο Ε, ο φίλος που πλήρωσε τα περισσότερα, θέλουμε να κρατήσουμε τον Α και τον Β όσο πιο κοντά μπορούμε. Για παράδειγμα, αν ο Α είχε πληρώσει 1 ευρώ, τότε ο Β θα έπρεπε να είχε πληρώσει 45 ευρώ και ο Γ θα έπρεπε να είχε πληρώσει τουλάχιστον 46 ευρώ. Αν π.χ. ο Α είχε πληρώσει 10 ευρώ, ο Β θα έπρεπε να είχε πληρώσει 36 ευρώ και ο Γ θα έπρεπε να πληρώσει τουλάχιστον 37. Με άλλα λόγια, εάν βάλουμε τις πληρωμές του Α και του Β όσο το δυνατόν πιο κοντά, αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα το μικρότερο δυνατό ποσό που θα μπορούσε να έχει πληρώσει ο Γ. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο Α έχει πληρώσει 22 ευρώ, ο Β 24 ευρώ, άρα ο Γ έχει πληρώσει 25 ευρώ, ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις του προβλήματος. Συνεπώς, μέγιστη τιμή του Ε = (320) - (22 + 24 + 25 + 124) = (320) - (195) = 125 ευρώ.

5. Ένα βάζο περιέχει κόκκινα, λευκά και μπλε σφαιρίδια του ιδίου μεγέθους. Η πιθανότητα να επιλέξουμε τυχαία 1 κόκκινο σφαιρίδιο, να το επανατοποθετήσουμε στο βάζο και μετά να επιλέξουμε τυχαία 1 λευκό σφαιρίδιο είναι ίδια με την πιθανότητα να επιλέξουμε τυχαία 1 μπλε σφαιρίδιο. Εάν ο αριθμός των σφαιριδίων κάθε χρώματος είναι πολλαπλάσιο του 3, ποιος είναι ο μικρότερος δυνατός συνολικός αριθμός σφαιριδίων στο βάζο;

Α. 9
Β. 12
Γ. 15

Δ. 18

ΛΥΣΗ

Έστω τα κόκκινα σφαιρίδια του βάζου είναι R, τα άσπρα είναι W και τα μπλε είναι B. Τότε, ο συνολικός αριθμός αυτών θα είναι T = R + W + B.
Όμως θα ισχύει ότι (R/T) . (W/T) = (B/T) => R . W = B . T .
Επειδή ο αριθμός των σφαιριδίων κάθε χρώματος είναι πολλαπλάσιο του 3, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως (3a) * (3b) = 3c * (3a + 3b + 3c) => (a * b)/c = a + b + c.
Εφόσον τα a, b και c πρέπει να είναι τουλάχιστον 1, τα a + b + c πρέπει να είναι τουλάχιστον 3.
Ας προσπαθήσουμε να διατηρήσουμε το c ως 1, καθώς μειώνει την πολυπλοκότητα των πράξεων. Η παραπάνω σχέση γίνεται a * b = a + b + 1. Επομένως, ψάχνουμε τους μικρότερους θετικούς ακεραίους, μεγαλύτερους της μονάδας, για τους οποίους ισχύει η παραπάνω σχέση. Είναι φανερό ότι αυτοί είναι το 2 και το 3. Επομένως, ο συνολικός αριθμός των σφαιριδίων θα είναι 3 * (1 + 2 + 3) = 18.
6. Έξι φίλοι κάνουν διακοπές σε ένα τουριστικό νησί. Υπάρχουν στο νησί 4 φυσικά αξιοθέατα: ένας καταρράκτης, ένα θεματικό πάρκο, μία λίμνη και μία σπηλιά. Οι φίλοι αποφασίζουν να επισκεφθούν μαζί ένα από αυτά τα αξιοθέατα. Για να επιλέξουν το αξιοθέατο που θα πάνε, καθένας από αυτούς ψηφίζει ένα από αυτά. Η πιθανότητα κάθε αξιοθέατο να λάβει τουλάχιστον μία ψήφο είναι περίπου:

Α. 31,7%
Β. 33,3%
Γ. 35,6%
Δ. 38,1%

ΛΥΣΗ

Έστω Α το ενδεχόμενο κάθε αξιοθέατο να πάρει τουλάχιστον μία ψήφο. Τότε,
P(A) = Αριθμός τρόπων με τους οποίους κάθε αξιοθέατο λαμβάνει τουλάχιστον μία ψήφο / Σύνολο τρόπων με τους οποίους οι φίλοι μπορούν να ψηφίσουν.
Δεδομένου ότι κάθε αξιοθέατο θα πρέπει να λαμβάνει τουλάχιστον μία ψήφο, οι 6 ψήφοι μπορούν να μοιραστούν σε 4 αξιοθέατα με τους εξής τρόπους: (1, 1, 1, 3) και (1, 1, 2, 2) χωρίς απαραίτητα να ισχύει η παραπάνω σειρά.

Περίπτωση 1: (1, 1, 1, 3)
Αρχικά, επιλέγουμε το αξιοθέατο που θα πάρει 3 ψήφους 4C1 = 4 δυνατοί τρόποι.
Τώρα, μπορούμε να επιλέξουμε τα 3 άτομα που θα ψηφίσουν αυτό το αξιοθέατο με 6C3 = 20 τρόπους.
Οι άλλοι 3 ψήφοι θα διανεμηθούν στα άλλα 3 αξιοθέατα με 3! = 6 τρόπους.
Επομένως, συνολικά στην περίπτωση 1 θα έχουμε 4*20*6 = 480 τρόπους.

Περίπτωση 2: (1, 1, 2, 2)
Επιλέγουμε τα δύο αξιοθέατα που θα πάρουν 2 ψήφους το καθένα με 4C2 = 6 τρόπους.
Μπορούμε να επιλέξουμε τα 2 άτομα που θα ψηφίσουν ένα από τα επιλεγμένα αξιοθέατα με 6C2 = 15 τρόπους.
Μπορούμε να επιλέξουμε τα άλλα 2 άτομα που θα ψηφίσουν το άλλο επιλεγμένο αξιοθέατο με 4C2 = 6 τρόπους.
Οι άλλες 2 ψήφοι θα κατανεμηθούν στα άλλα 2 αξιοθέατα με 2! = 2 τρόποι.
Άρα συνολικά στην περίπτωση 2 έχουμε 6*15*6*2 = 1080 τρόπους.

Επομένως, ο συνολικός αριθμός τρόπων με τους οποίους μπορούν να διανεμηθούν 6 ψήφοι σε 4 αξιοθέατα, έτσι ώστε κάθε αξιοθέατο να λαμβάνει τουλάχιστον μία ψήφο είναι 480 + 1080 = 1560 δυνατοί τρόποι

Ο συνολικός αριθμός των τρόπων με τους οποίους οι φίλοι μπορούν να ψηφίσουν είναι 4^6 δυνατοί τρόποι. Επομένως, P(A) = 1560 / 4^6 = 1560 / 4096, δηλ. περίπου 0.381

7. Μια κατανομή αποτελείται από τους ακεραίους 1 έως και 100, τέτοιους ώστε η συχνότητα κάθε ακεραίου ν είναι $2^{ν-1}$. Ποια είναι η διάμεσος της κατανομής;

Α. 10
Β. 20
Γ. 50
Δ.100

ΛΥΣΗ

Ο πίνακας συχνοτήτων της κατανομής είναι ο παρακάτω.

x_i	1	2	3	4	…	99	100
$ν_i$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	…	2^{98}	2^{99}

Οι αριθμοί 2^0, 2^1, …, 2^{99} είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με $α_1 = 1$ και $λ = 2$. Το άθροισμα των όρων είναι $S_ν = α_1 \cdot \frac{λ^ν - 1}{λ - 1}$, άρα $S_{100} = 1 \cdot \frac{2^{100}-1}{2-1} = 2^{100} - 1$.
Επομένως, το συνολικό πλήθος των παρατηρήσεων είναι $N = 2^{100} - 1$. Ο αριθμός αυτός είναι περιττός. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος περιττού πλήθους παρατηρήσεων, που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ισούται με τη μεσαία παρατήρηση.
Η μεσαία παρατήρηση βρίσκεται στη θέση $\frac{2^{100}-1+1}{2} = 2^{99}$, που αντιστοιχεί στην παρατήρηση 100. Άρα η διάμεσος είναι δ = 100.

8. Κατά τη διάρκεια ενός πειράματος, κάθε μαθητής καλείται να υπολογίσει τον τυχερό του αριθμό υψώνοντας το 7 στη δύναμη της αγαπημένης του ημέρας της εβδομάδας (αριθμός 1 έως 7 για Δευτέρα έως Κυριακή, αντίστοιχα), πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα επί 3 και προσθέτοντας το διπλάσιο της ηλικίας του σε έτη. Εάν μια τάξη αποτελείται από 28 μαθητές, ποια είναι η πιθανότητα η διάμεσος των αριθμών που προκύπτουν στην τάξη να μην είναι ακέραιος αριθμός;

Α. 0%
Β. 2,67%
Γ. 3,33%
Δ. 9,89%

ΛΥΣΗ

Ας αναλύσουμε τον αριθμό που δημιουργεί κάθε μαθητής. Όταν το 7 υψωθεί σε οποιαδήποτε θετική ακέραια δύναμη, το αποτέλεσμα θα είναι ένας περιττός αριθμός. Όταν αυτό το αποτέλεσμα πολλαπλασιαστεί επί 3, το αποτέλεσμα θα είναι και πάλι ένας περιττός αριθμός. Τέλος, όταν αυτό το αποτέλεσμα προστεθεί στη διπλασιασμένη ηλικία της ηλικίας του μαθητή (που είναι άρτιος αριθμός), το τελικό αποτέλεσμα θα είναι πάντα ένας περιττός αριθμός. Έτσι, κάθε μαθητής θα δημιουργήσει έναν περιττό αριθμό ανεξάρτητα από την αγαπημένη του/της ημέρα της εβδομάδας και την ηλικία του/της. Μας δίνεται ότι υπάρχουν 28 μαθητές στην τάξη. Η διάμεσος θα είναι ο μέσος όρος του 14ου και του 15ου αριθμού, εάν οι αριθμοί είναι σε αύξουσα σειρά.

Ωστόσο, δεδομένου ότι κάθε αριθμός είναι περιττός και ο μέσος όρος δύο περιττών αριθμών είναι πάντα ακέραιος, η πιθανότητα η διάμεσος να μην είναι ακέραιος είναι 0.

9. Ένα σύνολο πέντε θετικών ακεραίων έχει μέσο όρο 150. Ένας εκ των πέντε αριθμών υπερβαίνει κάποιον άλλον κατά 100 μονάδες. Οι υπόλοιποι τρεις αριθμοί βρίσκονται μεταξύ αυτών των δύο αριθμών και είναι ίσοι. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει ο μεγαλύτερος των πέντε αριθμών;

Α. 18
Β. 19
Γ. 21
Δ. 42

ΛΥΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι οι 5 φυσικοί αριθμοί με αύξουσα σειρά είναι οι : a, b, b, b, a+100
Μας δίνεται ότι a < b < a+100 και ότι οι αριθμοί a και b είναι θετικοί ακέραιοι.
Ο μέσος όρος των 5 αριθμών είναι (a+b+b+b+a+100)/5 = 150 => 2a+3b = 650 => b = (650 – 2a)/3, δηλ.
a < (650 – 2a)/3 < a+100 => 3a < 650 – 2a < 3a + 300 => 5a < 650 < 5a + 300.
Ανισότητα 1: 5a < 650 => a < 130
Ανισότητα 2: 650 < 5a + 300 => a > 70
Έτσι παίρνουμε ότι 70 < a < 130. Εφόσον το a είναι ακέραιος, μπορούμε να πούμε ότι το a μπορεί να πάρει όλες τις τιμές από το 71 έως το 129; Όχι. Αυτό που ξεχνάμε είναι ότι το b είναι επίσης ακέραιος. Ξέρουμε ότι b = (650 – 2a)/3.
Ο αριθμός 650 δε διαιρείται με το 3. Πρέπει να προσθέσουμε 1 μονάδα σε αυτόν ή να αφαιρέσουμε 2 μονάδες από αυτόν. Άρα το a πρέπει να είναι της μορφής 3x+1. Τότε όμως, b = (650 – 2*(3x+1))/3 =
= (648 – 6x)/3 = 216 – 2x. Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε θετικό ακέραιο x, το b θα είναι επίσης ακέραιος.
Από το 71 έως το 129, έχουμε τους παρακάτω αριθμούς που έχουν τη μορφή 3x+1:
73, 76, 79, 82, 85, … 127. Αυτή είναι μια αριθμητική πρόοδος. Τελευταίος όρος = Πρώτος όρος + (n – 1)*Κοινή διαφορά. Επομένως, 127 = 73 + (n – 1)*3 => n = 19.
Το a θα λάβει επομένως 19 διακριτές τιμές και ο τελευταίος όρος, δηλαδή ο (a+100) θα λάβει επίσης 19 διακριτές τιμές.

10. Ποια/ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή/σωστές:

I. Εάν για τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y ισχύει ότι:
|r| = 1, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στη X είναι αντίστροφος του συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης της X πάνω στην Y.

II. Εάν για τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y ισχύει ότι:
r = 0, τότε οι δύο αυτές τυχαίες μεταβλητές X και Y πιθανόν να είναι ανεξάρτητες.

III. Στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, το άθροισμα των κατακόρυφων αποστάσεων ε_i των σημείων (x_i, y_i) από την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στη X, $y = \beta_0 + \beta_1 x$, *είναι πάντα μηδέν.*

Α. Η I
Β. Η II και η III
Γ. Η I , η II και η III
Δ. Η I και η III

ΛΥΣΗ

I. Γνωρίζουμε ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y δίνεται από τον τύπο :

$$r = \frac{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\sqrt{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}\sqrt{\nu\sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)^2}}$$

Έστω η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στη X , *y = α + βx.* Ο συντελεστής διεύθυνσής της δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{\beta} = \frac{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i\right)}{\nu\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}$$

Έστω η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της X πάνω στη Y , x = γ + δy. Ο συντελεστής $\hat{\delta}$ προκύπτει εάν στον παραπάνω τύπο αντικαταστήσουμε τα x_i με y_i και τα y_i με x_i ..

Παρατηρώντας προσεκτικά τους τύπους καταλήγουμε ότι : $r^2 = \hat{\beta} * \hat{\delta}$.
Όμως, $|r| = 1 \Rightarrow r^2 = 1$. Άρα $\hat{\beta} * \hat{\delta} = 1$ και ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στη X είναι αντίστροφος του συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης της X πάνω στη Y. Η πρόταση είναι σωστή.

II. Εάν για τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y ισχύει ότι:
r = 0, τότε σίγουρα οι δύο τυχαίες μεταβλητές είναι γραμμικώς ασυσχέτιστες, αφού ο συγκεκριμένος συντελεστής είναι μέτρο γραμμικής εξάρτησης. Μπορεί όμως να υπάρχει κάποιου άλλου είδους εξάρτηση, όπως εκθετική εξάρτηση, λογαριθμική εξάρτηση κ.τ.λ. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δε μας δίνει καμιά πληροφορία για αυτού του είδους τις εξαρτήσεις. Η ανεξαρτησία είναι μια έννοια ευρύτερη από την γραμμική ανεξαρτησία. Σίγουρα όμως αφού r = 0, πιθανόν, όχι όμως σίγουρα, οι δύο τυχαίες μεταβλητές να είναι ανεξάρτητες. Η πρόταση είναι σωστή.

III. Έστω ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στη X : $y = \beta_0 + \beta_1 x$. Τότε :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y} + \hat{\beta}_1 \bar{x} - \hat{\beta}_1 x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i - n\bar{y} + \hat{\beta}_1 n\bar{x} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \\
&= n\bar{y} - n\bar{y} + \hat{\beta}_1 n\bar{x} - \hat{\beta}_1 n\bar{x} \\
&= 0\ .
\end{aligned}
$$

Άρα η πρόταση είναι σωστή.

ΛΥΚΕΙΑ-ΤΕΣΤ 2

1. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2022, πόσες ήταν οι μοτο-συκλέτες, καινούργιες και μεταχειρισμένες, που κυκλοφόρησαν για πρώτη φορά στην Ελλάδα;

49.896
68.896
59.896
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) Αυτοκίνητα και μοτοσυκλέτες, καινούρια και μεταχειρισμένα, που κυκλοφόρησαν για πρώτη φορά στην Ελλάδα :1985 - 2022

2. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2021, πόσες ήταν οι διανυκτερεύσεις αλλοδαπών τουριστών που διαμένουν μόνιμα στη Γερμανία στα τουριστικά κάμπινγκ:
153.797
405.742
102.344
205.332

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) (06. Διανυκτερεύσεις αλλοδαπών στα καταλύματα ξενοδοχειακού τύπου, κάμπινγκ και καταλύματα σύντομης διαμονής)

3. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2022, ποιο ήταν το κατώφλι κινδύνου φτώχειας μετά τις κοινωνικές μεταβιβάσεις (σε ευρώ) σε νοικοκυριά με δύο ενήλικες και δύο εξαρτώμενα παιδιά κάτω των 14 ετών;
9.908
10.863
11.995
14.718

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) (02. Εισόδημα και Συνθήκες Διαβίωσης των Νοικοκυριών (SILC) - Δείκτες (2011 - 2022)

4. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2022, πόσες ήταν συνολικά οι εκδοθείσες άδειες οικοδομικής δραστηριότητας στη Δημοτική Ενότητα Θεσσαλονίκης ;
213
1.436
508
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) (25. Είδος οικοδομικών αδειών κατά Περιφέρεια, Περιφερειακή Ενότητα, Δήμο, Δημοτική-Τοπική Κοινότητα. (Συγκεντρωτικό 2022)

5. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2021, η συνολική χρηματοδότηση για δαπάνες Υγείας (σε δισ. ευρώ) στην Ελλάδα ανήλθε σε:
13,7
14,7
18,7
16,7

Στατιστικές- ELSTAT (statistics.gr) (04. The financing of health services by financing sector (HC x HF) - SHA 2011 GR (2013 - 2021)

6. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2019, πόση ήταν η παραγωγή γάλακτος βουβαλιών (σε τόνους) στην Ελλάδα;
2.493
1.299
3.459
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) (07α. Παραγωγή γάλακτος, κατά Περιφέρεια και Περιφερειακή Ενότητα

7. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2022, πόσες ήταν οι πωλήσεις τηλεοπτικών περιοδικών στην Ελλάδα:
4.176.032
6.176.036
5.176.032
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) (01. Πωλήσεις περιοδικών κατά μήνα έτους)

EUROSTAT

8. Σύμφωνα με τα στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποιες χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ) είχαν το μεγαλύτερο Έλλειμμα και το μεγαλύτερο Πλεόνασμα Γενικής Κυβέρνησης, το έτος 2022;

Έλλειμμα	Πλεόνασμα
Ιταλία	Δανία
Ουγγαρία	Ιταλία
Ρουμανία	Ιταλία

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/TEC00127/default/table?lang=en

9. Σύμφωνα με τα στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, πόσες ήταν οι αφίξεις ξένων τουριστών σε όλα τα τουριστικά καταλύματα στην Κύπρο, το έτος 2022;

1.100.145
1.404.355
3.404.598
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

Statistics | Eurostat (europa.eu) (TOUR_OCC_ARNAT)

10. Σύμφωνα με τα στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, πόσες ήταν οι εθνικές δαπάνες για την προστασία του περιβάλλοντος στο σύνολο της οικονομίας στην Ισπανία (σε εκατομμύρια ευρώ), το έτος 2021;
19.417,6
18.354,7
20.355,6
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/ENV_AC_EPNEIS1__custom_6960156/default/table?lang=en
ENV_AC_EPNEIS1__custom_6960156

ΛΥΚΕΙΑ-ΤΕΣΤ 3

1. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, πόσο μειώθηκαν ή αυξήθηκαν τα θανατηφόρα εργατικά ατυχήματα στην Ελλάδα, κατά το έτος 2021 σε σχέση με το έτος 2020;
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις
20,4%
12,9%
-24,4%

infographic-work-accidents-2021 - ELSTAT (statistics.gr)

2. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, ποιο ήταν το ποσοστό αύξησης στη σύναψη συμφώνων συμβίωσης στην Ελλάδα, κατά το έτος 2021 σε σχέση με το έτος 2020;
29,5%
28,5%
25,5%
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

infographic-vital-statistics-survey-2021 - ELSTAT

3. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, κατά το έτος 2021, ποιο ήταν το ποσοστό των βαριά τραυματισμένων από τροχαία ατυχήματα στην Ελλάδα, σε σχέση με τον αριθμό των τραυματισμένων ;

5%
14%
15%
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις
infographic-road-accidents-2021 - ELSTAT (statistics.gr)

4. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, πόσο αυξήθηκε η παραγωγή αυγοτάραχου (σε %) στην Ελλάδα, κατά το έτος 2021 σε σχέση με το έτος 2020;
-32%
3,2%

+168,3%

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

infographic-aquaculture-2021 - ELSTAT (statistics.gr)

5. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, κατά το έτος 2020 πόσοι ήταν οι θάνατοι από covid-19 στην Ελλάδα ;
12.534
5.028
10.328
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

infographic-causes-death-2020 - ELSTAT (statistics.gr)

6. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, κατά το έτος 2022, πόσες ήταν οι διανυκτερεύσεις αλλοδαπών σε καταλύματα σύντομης διαμονής στην Ελλάδα;
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις
35.851.741
4.599.199
23.851.741

infographic-rooms-for-rent-2022 - ELSTAT (statistics.gr)

7. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, ποιος τομέας είχε τη μεγαλύτερη μεταβολή στον κύκλο εργασιών στην Ελλάδα, κατά το έτος 2022 σε σχέση με το έτος 2021;
Τέχνες, διασκέδαση και ψυχαγωγία
Μεταποίηση
Υπηρεσίες παροχής καταλύματος και εστίασης
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

infographic-ent-2022 - ELSTAT (statistics.gr)

EUROSTAT
8. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Sustainable development goals (SDGs)», έκδοσης 2023, ποια χώρα είχε το υψηλότερο και ποια το χαμηλότερο ποσοστό παχυσαρκίας (ως % του πληθυσμού ηλικίας 18 ετών και άνω), κατά το έτος 2019;

Υψηλότερο	Χαμηλότερο
Μάλτα	Ρουμανία
Γερμανία	Βουλγαρία
Ισλανδία	Ελλάδα

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

Οι Στόχοι Βιώσιμης Ανάπτυξης (SDGs) και εγώ - έκδοση 2023 (europa.eu) (4/4)

9. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat « Sustainable development goals (SDGs)», έκδοσης 2023, ποια χώρα είχε το χαμηλότερο ποσοστό, ατόμων που ανέφεραν ότι καπνίζουν επί του παρόντος (ως % του πληθυσμού ηλικίας 15 ετών και άνω), κατά το έτος 2020;

Γαλλία
Σουηδία
Ελλάδα
Γερμανία

Οι Στόχοι Βιώσιμης Ανάπτυξης (SDGs) και εγώ - έκδοση 2023 (europa.eu) (3/5)

10. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat “Sustainable development goals (SDGs)”, έκδοσης 2023, ποια χώρα είχε το υψηλότερο ποσοστό (%) επιφάνειας χερσαίων προστατευόμενων περιοχών (επί της συνολικής έκτασης), κατά το έτος 2021;
Πολωνία
Ελλάδα
Σουηδία
Λουξεμβούργο

Οι Στόχοι Βιώσιμης Ανάπτυξης (SDGs) και εγώ - έκδοση 2023 (europa.eu) (2/3)