ΤΕΣΤ 1

ΕΚΔΟΧΗ 1

Άσκηση 1

Κάποιος θέλει να δημιουργήσει έναν τριψήφιο φυσικό αριθμό για PIN ως εξής: το ψηφίο των εκατοντάδων είναι το 1 ή το 2, το ψηφίο των δεκάδων είναι κάποιος από τους αριθμούς 0, 4, 8 και το ψηφίο των μονάδων είναι κάποιος από τους αριθμούς 3, 5, 6, 7. Η πιθανότητα ο αριθμός που θα δημιουργηθεί να είναι πρώτος είναι:

Α. 8,33%

Β. 12,50%

Γ. 16,67%

Δ.20,83%

Λύση

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από τους παρακάτω 24 τριψήφιους:

Ω = {103, 105, 106, 107, 143, 145, 146, 147, 183, 185, 186, 187, 203, 205, 206, 207, 243, 245, 246, 247, 283, 285, 286, 287}

Οι αριθμοί: 106, 146, 186, 206, 246, 286 είναι άρτιοι (πολλαπλάσια του 2, δεν είναι πρώτοι).

Οι αριθμοί: 105, 145, 185, 205, 245, 285 τελειώνουν σε 5 (είναι πολλαπλάσια του 5, δεν είναι πρώτοι).

Οι αριθμοί: 147, 183, 207, 243 έχουν άθροισμα ψηφίων που διαιρείται με το 3 (είναι πολλαπλάσια του 3, δεν είναι πρώτοι).

Οι αριθμοί: 143, 187 είναι πολλαπλάσια του 11 (143 = 11·13, 187 = 11·17).

Οι αριθμοί: 203, 287 είναι πολλαπλάσια του 7 (203 = 7·29, 287 = 7·41).

Ο αριθμός: 247 = 13·19.

Οι υπόλοιποι αριθμοί: 103, 107, 283 είναι πρώτοι.

Έχουμε το σύνολο Α = {103, 107, 283}, με Ν(Α) = 3. Ισχύει:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{24} = 12{,}5\%$$

Άσκηση 2

Η διάμεσος των παρακάτω 4.040 αριθμών

1, 2, 3, . . . , 2.020, 1^2, 2^2, 3^2, . . . , 2.020^2

είναι:

Α. 2.020,5 **Β.** 1.010,5 **Γ.** 1.976,5 **Δ.** 1.987,5

Λύση

Το πλήθος των αριθμών είναι άρτιο, επομένως η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων αριθμών, δηλαδή ο μέσος όρος του 2.020^{ου} και του 2.021^{ου} αριθμού.

Για να βρεθεί η διάμεσος θα πρέπει οι αριθμοί να γραφούν με σειρά μεγέθους.

Παρατηρούμε ότι:

$1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, …, $44^2 = 1.936$.

Άρα, μέχρι και το 1.936 υπάρχουν 1.936 + 44 = 1.980 αριθμοί.

Για να βρούμε τον 2.020^{ο} αριθμό θα πρέπει στον 1.980^{ο} αριθμό, δηλαδή στον 1.936, να προσθέσουμε 40.

Επομένως, ο 2020^{ος} αριθμός είναι ο 1.976, ο 2021^{ος} αριθμός είναι ο 1.977 και η διάμεσος είναι δ = (1.976 + 1.977)/2 = 1.976,5.

Άσκηση 3

Ο Αλέξης και ο Βασίλης έχουν ο καθένας από μία τσάντα με 12 μπάλες, αριθμημένες από το 1 έως και το 12. Καθένας αφαιρεί μία τυχαία μπάλα από τη δική του τσάντα. Έστω Α το άθροισμα των αριθμών στις μπάλες που απομένουν στην τσάντα του Αλέξη και Β το άθροισμα των αριθμών στις μπάλες που απομένουν στην τσάντα του Βασίλη. Η πιθανότητα τα Α και Β να διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 5 είναι:

Α. 13,89%

Β. 20,83%

Γ. 27,78%

Δ. 34,72%

Λύση

N(Ω) = 144.

Ισχύει: 1 + 2 + 3 + … + 12 = 78.

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός της μπάλας που αφαιρεί ο Αλέξης είναι μ με $1 \leq μ \leq 12$ και ότι ο αριθμός της μπάλας που αφαιρεί ο Βασίλης είναι ν με $1 \leq ν \leq 12$.

Τότε Α = 78 – μ και Β = 78 – ν και Α – Β = (78 – μ) – (78 – ν) = ν – μ.

Θα πρέπει το (ν – μ) να είναι πολλαπλάσιο του 5. Γνωρίζουμε ότι **ένας αριθμός διαιρείται με το 5**, αν τελειώνει σε 0 ή σε 5. Θα πρέπει:

(ν, μ)∈Α= {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10), (11, 11), (12, 12), (1, 6), (1, 11), (2, 7), (2, 12), (3, 8), (4, 9), (5, 10), (6, 1), (6, 11), (7, 2), (7, 12), (8, 3), (9, 4), (10, 5), (11, 1), (11, 6), (12, 2), (12,7)}

N(A) = 30. Άρα P(A) = $\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{30}{144} = \frac{5}{24} = 0{,}2083$.

Άσκηση 4

Δύο αριθμοί α και β, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικοί μεταξύ τους, επιλέγονται τυχαία από το σύνολο των πρώτων 10 θετικών ακεραίων {1, 2, …, 10}. Ποια είναι η πιθανότητα η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους, |α – β|, να είναι μικρότερη ή ίση του 5;

Α. 20% Β. 40% Γ. 60% Δ. 80%

Λύση

Έστω $A_i = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}, |a - b| = \{i\}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$A_0 = \{(i, i) | i = 1, 2, 3, \ldots, 10\}$ και $|A_0| = 10$

$A_1 = \{(i, i + 1) | i = 1, 2, 3, \ldots, 9\} \cup \{(i, i - 1) | i = 2, 3, \ldots, 10\}$ και $|A_1| = 9 + 9 = 18$

$A_2 = \{(i, i + 2) | i = 1, 2, 3, \ldots, 8\} \cup \{(i, i - 2) | i = 3, 4, \ldots, 10\}$ και $|A_2| = 8 + 8 = 16$

$A_3 = \{(i, i + 3) | i = 1, 2, \ldots, 7\} \cup \{(i, i - 3) | i = 4, 5, \ldots, 10\}$ και $|A_3| = 7 + 7 = 14$

$A_4 = \{(i, i + 4) | i = 1, 2, \ldots, 6\} \cup \{(i, i - 4) | i = 5, 6, \ldots, 10\}$ και $|A_4| = 6 + 6 = 12$

$A_5 = \{(i, i + 5) | i = 1, 2, \ldots, 5\} \cup \{(i, i - 5) | i = 6, 7, \ldots, 10\}$ και $|A_5| = 5 + 5 = 10$

Αριθμός ευνοϊκών περιπτώσεων: N(A) = 10 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 = 80

Αριθμός δυνατών περιπτώσεων N(Ω) = 10 × 10 = 100

P(A) = N(A)/N(Ω) = 80/100 = 80%

Άσκηση 5

Εάν η διάμεσος των αριθμών -10, 29, 6, 11, 31 και x είναι 20, ποια είναι η ελάχιστη δυνατή μέση τιμή των αριθμών;

Α. 11

Β. 16

Γ. 20

Δ. 29

Λύση:

Έχουμε συνολικά 6 αριθμούς: α_1, α_2, α_3 α_4 α_5, α_6, επομένως η διάμεσός τους θα ισούται με τη μέση τιμή του $3^{ου}$ και $4^{ου}$ όρου, δηλ. $20 = (\alpha_3+\alpha_4)/2 \Leftrightarrow \alpha_3+\alpha_4 = 40$.

Ο μόνος άγνωστος είναι ο x και η μέση τιμή των 6 αριθμών θα είναι η ελάχιστη, εάν η τιμή του x είναι η ελάχιστη δυνατή.

Η αύξουσα σειρά των 5 γνωστών αριθμών είναι:

-10, 6, 11, 29, 31,

και ο x πρέπει να τοποθετηθεί στη σωστή θέση.

Δεδομένου ότι ο x μπορεί να πάρει διάφορες τιμές, ελέγχουμε τις διαφορετικές περιπτώσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη ότι η διάμεσος ισούται με 20 ή την ισοδύναμη σχέση $\alpha_3+\alpha_4 = 40$.

Περίπτωση 1**:** $x \leq 11$

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $\alpha_4 = 11$

και επειδή και $\alpha_3 \leq 11$, θα ισχύει $\alpha_3+\alpha_4 \leq 22$, δηλ. δε θα ικανοποιείται η σχέση $\alpha_3+\alpha_4 = 40$.

Περίπτωση 2: $11 < x < 29$

Στην περίπτωση αυτή η διάταξη των 6 αριθμών θα είναι: -10, 6, 11, x, 29, 31

Θα έχουμε $\alpha_3 = 11$ και $\alpha_4= x$ και επιπλέον η μεγαλύτερη τιμή του α_4 θα είναι < 29.

Επομένως, $\alpha_3 + \alpha_4 < 40$, δηλ. δε θα ικανοποιείται η σχέση $\alpha_3+\alpha_4 = 40$.

Περίπτωση 3: $x \geq 29$

Στην περίπτωση αυτή διακρίνουμε 3 υποπεριπτώσεις:

- Για x=29, τότε οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής: -10, 6, 11, 29, 29, 31
- Για 29<x ≤31, τότε οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής: -10, 6, 11, 29, x, 31
- Για x>31, τότε οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής: -10, 6, 11, 29, 31, x

Και στις 3 υποπεριπτώσεις έχουμε $\alpha_3=11$ και $\alpha_4=29$, επομένως η σχέση $\alpha_3+\alpha_4 = 40$ ικανοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις και η ελάχιστη τιμή του x θα είναι το 29.

Άρα, η ελάχιστη μέση τιμή θα είναι:

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6)/6 = (-10+6+11+29+29+31)/6 = 96/6 = 16$.

Άσκηση 6

Ένα κουτί περιέχει κόκκινες, πράσινες και μαύρες μπάλες. Εάν επιλέξουμε μία μπάλα από το κουτί, η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι 25%, η πιθανότητα να είναι πράσινη είναι 50% και η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι 25%. Προσθέτουμε στο κουτί δύο μπάλες ίδιου χρώματος (κόκκινες ή πράσινες ή μαύρες). Τώρα, εάν επιλέξουμε μία μπάλα από το κουτί, η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι 24%, η πιθανότητα να είναι πράσινη είναι 48% και η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι 28%. Οι μπάλες που υπήρχαν αρχικά στο κουτί ήταν:

Α. 36

Β. 42

Γ. 48

Δ. 50

Λύση

Υποθέτουμε ότι στο κουτί υπήρχαν αρχικά x μπάλες. Όταν προσθέσαμε δύο μπάλες ίδιου χρώματος στο κουτί, αυξήθηκε η πιθανότητα επιλογής μαύρης, ενώ μειώθηκε η πιθανότητα επιλογής κόκκινης ή πράσινης. Επομένως, προσθέσαμε δύο μαύρες μπάλες.

Στην αρχή υπήρχαν $\frac{25}{100} \cdot x$ μαύρες μπάλες.

Στη συνέχεια υπήρχαν $\frac{28}{100} \cdot (x+2)$ μαύρες μπάλες.

Ισχύει:

$\frac{25}{100} \cdot x + 2 = \frac{28}{100} \cdot (x+2) \Leftrightarrow 25x + 200 = 28(x+2) \Leftrightarrow$

$25x + 200 = 28x + 56 \Leftrightarrow 3x = 144 \Leftrightarrow x = 48.$

Άσκηση 7

Ένας μαθητής συμμετείχε σε μια σειρά από διαγωνίσματα που το καθένα είχε πέντε ερωτήσεις. Στο πρώτο διαγώνισμα απάντησε μόνο σε μία ερώτηση, στο δεύτερο διαγώνισμα απάντησε σε δύο ερωτήσεις και στα υπόλοιπα απάντησε και στις πέντε ερωτήσεις. Στο τέλος, υπολόγισε ότι κατά μέσο όρο στα διαγωνίσματα είχε απαντήσει σε τέσσερις ερωτήσεις. Όλα τα διαγωνίσματα στα οποία συμμετείχε ήταν:

Α. 4

Β. 5

Γ. 6

Δ. 7

Λύση

Έστω ότι τα υπόλοιπα διαγωνίσματα είναι x.

Απάντησε συνολικά σε $1 + 2 + 5x = 5x + 3$ ερωτήσεις και

έδωσε συνολικά $x + 2$ διαγωνίσματα. Άρα:

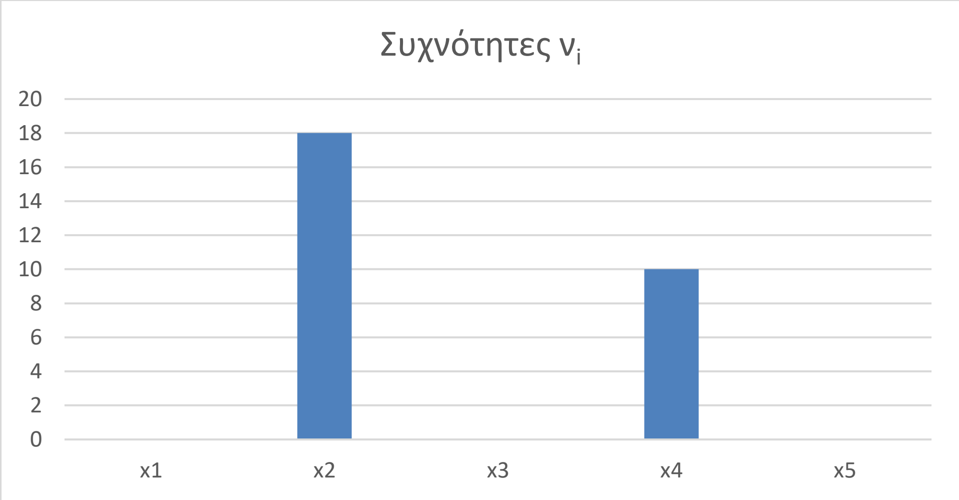
$\frac{5x+3}{x+2} = 4 \Leftrightarrow 5x + 3 = 4x + 8 \Leftrightarrow x = 5.$

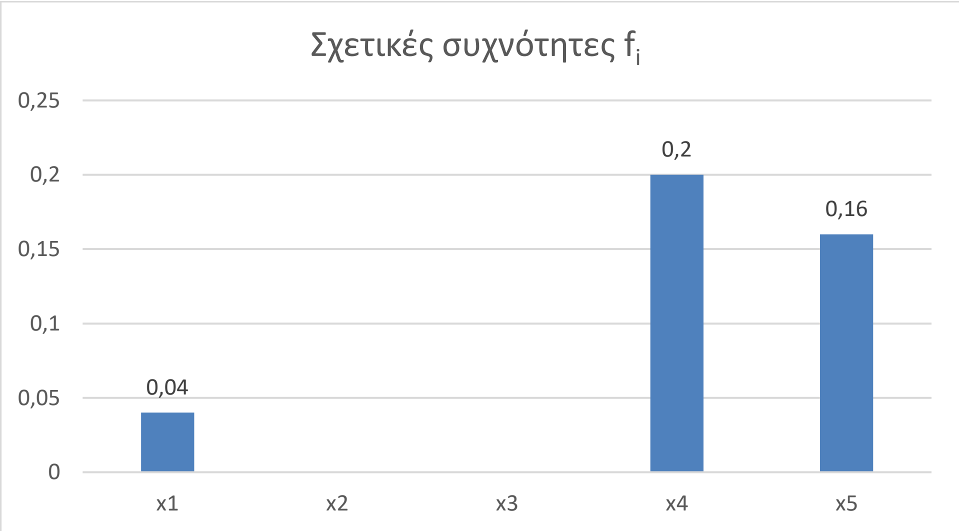
Συνεπώς, όλα τα διαγωνίσματα στα οποία συμμετείχε ήταν x + 2 = 7.

Άσκηση 8

Με τη βοήθεια των παρακάτω ραβδογραμμάτων συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων, να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για τις τιμές:

v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5





Α.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
2	18	12	10	8	0,04	0,36	0,24	0,20	0,16

Β.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
3	18	10	10	10	0,04	0,34	0,26	0,20	0,16

Γ.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
4	18	14	10	6	0,04	0,38	0,28	0,20	0,16

Δ.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
5	18	8	10	12	0,04	0,40	0,30	0,20	0,16

Λύση

Από τα ραβδογράμματα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$ν_i$	f_i
x_1		0,04
x_2	18	
x_3		
x_4	10	0,20
x_5		0,16
Σύνολο		

$\nu_2 = 18,\ \nu_4 = 10, f_1 = 0{,}04,\ f_4 = 0{,}20, f_5 = 0{,}16$

$f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} \Leftrightarrow \nu = \frac{\nu_4}{f_4} \Leftrightarrow \nu = \frac{10}{0{,}20} \Leftrightarrow \nu = 50$

$\nu_1 = f_1 \cdot \nu \ \Leftrightarrow \nu_1 = 2$

$\nu_5 = f_5 \cdot \nu \ \Leftrightarrow \nu_5 = 8$

$\nu_3 = \nu - \nu_1 - \nu_2 - \nu_4 - \nu_5 = 50 - 2 - 18 - 10 - 8 = 12$

$f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{18}{50} = 0{,}36$

$f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{12}{50} = 0{,}24$

x	$ν_i$	f_i
x_1	2	0,04
x_2	18	0,36
x_3	12	0,24
x_4	10	0,20
x_5	8	0,16
Σύνολο	50	1,00

Άσκηση 9

Οι παρακάτω τιμές έχουν τοποθετηθεί σε αύξουσα σειρά. Εάν η διάμεσος ισούται με 63, να βρεθεί η τιμή του x.

29, 32, 48, 50, x, x + 2, 72, 78, 84, 95

Α. 52

Β. 53

Γ. 60

Δ. 62

Λύση:

Ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων είναι 10, επομένως η διάμεσος θα ισούται με τον μέσο όρο του 5^{ου} και του 6^{ου} όρου, δηλαδή:

Διάμεσος = (5^{ος} όρος + 6^{ος} όρος)/2

63 = [x + (x + 2)]/2

63 = (2x + 2)/2

63 = 2(x + 1)/2

$63 = x + 1$
$x = 62$

Άσκηση 10
Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Εάν προσθέσουμε σε ν αριθμούς τη σταθερά α, η μέση τιμή τους παραμένει σταθερή.

β) Εάν πολλαπλασιάσουμε ν αριθμούς με τη σταθερά λ, η μέση τιμή τους παραμένει σταθερή.

γ) Εάν αφαιρέσουμε από ν αριθμούς τη σταθερά α, η διάμεση τιμή τους μειώνεται κατά α.

δ) Εάν διαιρέσουμε ν αριθμούς με τη σταθερά λ, η διάμεση τιμή πολλαπλασιάζεται με 1/λ.

Α. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ

Β. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ

Γ. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ

Δ. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ

Λύση:
α) Αρχική μέση τιμή: $\mu = (x_1 + x_2 + \dots + x_\nu) / \nu$

Μετά την πρόσθεση της σταθεράς α σε όλους τους αριθμούς, βρίσκουμε ότι η μέση τιμή δεν παραμένει σταθερή:

$\mu' = [(x_1 + \alpha) + (x_2 + \alpha) + \dots + (x_\nu + \alpha)] / \nu = (\nu \cdot \alpha + x_1 + x_2 + \dots + x_\nu)/\nu = \alpha + \mu$.

β) Αρχική μέση τιμή: $\mu = (x_1 + x_2 + \dots + x_\nu) / \nu$

Μετά τον πολλαπλασιασμό με τη σταθερά λ όλων των αριθμών, βρίσκουμε ότι η μέση τιμή δεν παραμένει σταθερή:

$\mu' = (\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2 + \dots + \lambda \cdot x_\nu) / \nu = \lambda \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_\nu)/\nu = \lambda \cdot \mu$.

γ) Αρχική διάμεση τιμή x_Δ: x_1 , x_2 , … , x_Δ , …, x_ν

Μετά την αφαίρεση της σταθεράς α από όλους τους αριθμούς, η διάταξη των ν αριθμών δεν αλλάζει, όμως όλες οι τιμές είναι πλέον μειωμένες κατά α: $x_1 - \alpha$, $x_2 - \alpha$, … , $x_{\Delta'} = x_\Delta - \alpha$, …, $x_\nu - \alpha$

και η νέα διάμεσος $x_{\Delta'} = x_\Delta - \alpha$.

δ) Αρχική διάμεση τιμή x_Δ: x_1 , x_2 , … , x_Δ , …, x_ν

Αν διαιρέσουμε όλους τους αριθμούς με σταθερά λ, η διάταξη των ν αριθμών δεν αλλάζει, όμως όλες οι τιμές είναι πλέον διαιρεμένες με λ: x_1/λ , x_2/λ , … , $x_{\Delta'} = x_\Delta/\lambda$, …, x_ν/λ

και η νέα διάμεσος $x_{\Delta'} = x_\Delta/\lambda$ ή ισοδύναμα πολλαπλασιασμένες με 1/λ.

ΕΚΔΟΧΗ 2

Άσκηση 1

Κάποιος θέλει να δημιουργήσει έναν τριψήφιο φυσικό αριθμό για PIN ως εξής: το ψηφίο των εκατοντάδων είναι το 1 ή το 2, το ψηφίο των δεκάδων είναι κάποιος από τους αριθμούς 0, 4, 8 και το ψηφίο των μονάδων είναι κάποιος από τους αριθμούς 3, 5, 6, 7. Η πιθανότητα ο αριθμός που θα δημιουργηθεί να είναι πρώτος είναι:

Α. 8,33%

Β. 12,50%

Γ. 16,67%

Δ.20,83%

Λύση

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από τους παρακάτω 24 τριψήφιους:

Ω = {103, 105, 106, 107, 143, 145, 146, 147, 183, 185, 186, 187, 203, 205, 206, 207, 243, 245, 246, 247, 283, 285, 286, 287}.

Οι αριθμοί: 106, 146, 186, 206, 246, 286 είναι άρτιοι (πολλαπλάσια του 2, δεν είναι πρώτοι).

Οι αριθμοί: 105, 145, 185, 205, 245, 285 τελειώνουν σε 5 (είναι πολλαπλάσια του 5, δεν είναι πρώτοι).

Οι αριθμοί: 147, 183, 207, 243 έχουν άθροισμα ψηφίων που διαιρείται με το 3 (είναι πολλαπλάσια του 3, δεν είναι πρώτοι).

Οι αριθμοί: 143, 187 είναι πολλαπλάσια του 11 (143 = 11·13, 187 = 11·17).

Οι αριθμοί: 203, 287 είναι πολλαπλάσια του 7 (203 = 7·29, 287 = 7·41).

Ο αριθμός: 247 = 13·19.

Οι υπόλοιποι αριθμοί: 103, 107, 283 είναι πρώτοι.

Έχουμε το σύνολο Α = {103, 107, 283}, με Ν(Α) = 3. Ισχύει:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{24} = 12{,}5\%$$

Άσκηση 2

Η διάμεσος των παρακάτω 4.040 αριθμών

1, 2, 3, . . . , 2.020, 1^2, 2^2, 3^2, . . . , 2.020^2

είναι:

Α. 2.020,5 **Β.** 1.010,5 **Γ.** 1.976,5 **Δ.** 1.987,5

Λύση

Το πλήθος των αριθμών είναι άρτιο, επομένως η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων αριθμών, δηλαδή ο μέσος όρος του $2.020^{ου}$ και του $2.021^{ου}$ αριθμού.

Για να βρεθεί η διάμεσος θα πρέπει οι αριθμοί να γραφούν με σειρά μεγέθους.

Παρατηρούμε ότι:

$1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, …, $44^2 = 1.936$.

Άρα, μέχρι και το 1.936 υπάρχουν 1.936 + 44 = 1.980 αριθμοί.

Για να βρούμε τον $2.020^{ο}$ αριθμό θα πρέπει στον $1.980^{ο}$ αριθμό, δηλαδή στον 1.936, να προσθέσουμε 40.

Επομένως, ο $2020^{ος}$ αριθμός είναι ο 1.976, ο $2021^{ος}$ αριθμός είναι ο 1.977 και η διάμεσος είναι δ = (1.976 + 1.977)/2 = 1.976,5.

Άσκηση 3

Ο Αλέξης και ο Βασίλης έχουν ο καθένας από μία τσάντα με 12 μπάλες αριθμημένες από το 1 έως και το 12. Καθένας αφαιρεί μία τυχαία μπάλα από τη δική του τσάντα. Έστω A το άθροισμα των αριθμών στις μπάλες που απομένουν στην τσάντα του Αλέξη και B το άθροισμα των αριθμών στις μπάλες που απομένουν στην τσάντα του Βασίλη. Η πιθανότητα τα A και B να διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 5 είναι:

Α. 13,89%

Β. 20,83%

Γ. 27,78%

Δ. 34,72%

Λύση

N(Ω) = 144.

Ισχύει: 1 + 2 + 3 + … + 12 = 78.

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός της μπάλας που αφαιρεί ο Αλέξης είναι μ με 1 ≤ μ ≤ 12 και ότι ο αριθμός της μπάλας που αφαιρεί ο Βασίλης είναι ν με 1 ≤ ν ≤ 12.

Τότε A = 78 – μ και B = 78 – ν και A – B = (78 – μ) – (78 – ν) = ν – μ.

Θα πρέπει το (ν – μ) να είναι πολλαπλάσιο του 5. Γνωρίζουμε ότι **ένας αριθμός διαιρείται με το 5**, αν τελειώνει σε 0 ή σε 5. Θα πρέπει:

(ν, μ)∈A= {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10), (11, 11), (12, 12), (1, 6), (1, 11), (2, 7), (2, 12), (3, 8), (4, 9), (5, 10), (6, 1), (6, 11), (7, 2), (7, 12), (8, 3), (9, 4), (10, 5), (11, 1), (11, 6), (12, 2), (12,7)}

N(A) = 30. Άρα P(A) = $\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{30}{144} = \frac{5}{24} = 0{,}2083$.

Άσκηση 4

Δύο αριθμοί α και β, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικοί μεταξύ τους, επιλέγονται τυχαία από το σύνολο των πρώτων 10 θετικών ακεραίων {1, 2, …, 10}. Ποια είναι η πιθανότητα η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους, |α – β|, να είναι μικρότερη ή ίση του 5;

Α. 20% **Β.** 40% **Γ.** 60% **Δ.** 80%

Λύση

Έστω $A_i = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 2, 3, …, 10\}, |a - b| = \{i\}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$A_0 = \{(i, i) | i = 1, 2, 3, … , 10\}$ και $|A_0| = 10$

$A_1 = \{(i, i + 1) | i = 1, 2, 3, … , 9\} \cup \{(i, i - 1) | i = 2, 3, … , 10\}$ και $|A_1| = 9 + 9 = 18$

$A_2 = \{(i, i + 2) | i = 1, 2, 3, … , 8\} \cup \{(i, i - 2) | i = 3, 4, … , 10\}$ και $|A_2| = 8 + 8 = 16$

$A_3 = \{(i, i + 3) | i = 1, 2, … , 7\} \cup \{(i, i - 3) | i = 4, 5, … , 10\}$ και $|A_3| = 7 + 7 = 14$

$A_4 = \{(i, i + 4) | i = 1, 2, … , 6\} \cup \{(i, i - 4) | i = 5, 6, … , 10\}$ και $|A_4| = 6 + 6 = 12$

$A_5 = \{(i, i + 5) | i = 1, 2, … , 5\} \cup \{(i, i - 5) | i = 6, 7, … , 10\}$ και $|A_5| = 5 + 5 = 10$

Αριθμός ευνοϊκών περιπτώσεων: N(A) = 10 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 = 80

Αριθμός δυνατών περιπτώσεων N(Ω) = 10 * 10 = 100

P(A) = N(A)/N(Ω) = 80/100 = 80%

Άσκηση 5

Εάν η διάμεσος των αριθμών -10, 29, 6, 11, 31, και x είναι 20, ποια είναι η ελάχιστη δυνατή μέση τιμή των αριθμών;

Α. 11

Β. 16

Γ. 20

Δ. 29

Λύση:

Έχουμε συνολικά 6 αριθμούς $α_1$, $α_2$, $α_3$ $α_4$ $α_5$, $α_6$, επομένως η διάμεσός τους θα ισούται με τη μέση τιμή του 3^{ου} και 4^{ου} όρου, δηλ. $20 = (α_3+α_4)/2 \Leftrightarrow α_3+α_4 = 40$.
Ο μόνος άγνωστος είναι ο x και η μέση τιμή των 6 αριθμών θα είναι η ελάχιστη, εάν η τιμή του x είναι η ελάχιστη δυνατή.
Η αύξουσα σειρά των 5 γνωστών αριθμών είναι:
-10, 6, 11, 29, 31,
και ο x πρέπει να τοποθετηθεί στη σωστή θέση.

Δεδομένου ότι ο x ότι μπορεί να πάρει διάφορες τιμές, ελέγχουμε τις διαφορετικές περιπτώσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη ότι η διάμεσος ισούται με 20 ή την ισοδύναμη σχέση $α_3+α_4 = 40$.
Περίπτωση 1**:** $x \leq 11$
Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $α_4 = 11$.
και επειδή και $α_3 \leq 11$, θα ισχύει $α_3+α_4 \leq 22$, δηλ. δε θα ικανοποιείται η σχέση $α_3+α_4 = 40$.

Περίπτωση 2: $11 < x < 29$
Στην περίπτωση αυτή η διάταξη των 6 αριθμών θα είναι: -10, 6, 11, x, 29, 31.
Θα έχουμε $α_3 = 11$ και $α_4 = x$ και επιπλέον η μεγαλύτερη τιμή του $α_4$ θα είναι < 29.
Επομένως, $α_3 + α_4 < 40$, δηλ. δε θα ικανοποιείται η σχέση $α_3+α_4 = 40$.

Περίπτωση 3: $x \geq 29$

Στην περίπτωση αυτή διακρίνουμε 3 υποπεριπτώσεις:

- Για x=29, τότε οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής: -10, 6, 11, 29, 29, 31
- Για 29<x ≤31, τότε οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής: -10, 6, 11, 29, x, 31
- Για x>31, τότε οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής: -10, 6, 11, 29, 31, x

Και στις 3 υποπεριπτώσεις έχουμε $α_3=11$ και $α_4=29$, επομένως η σχέση $α_3+α_4 = 40$ ικανοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις και η ελάχιστη τιμή του x θα είναι το 29.
Άρα, η ελάχιστη μέση τιμή θα είναι:
$(α_1 + α_2 + α_3 + α_4 + α_5 + α_6)/6 = (-10+6+11+29+29+31)/6 = 96/6 = 16$

Άσκηση 6

Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 160 επιβατών μιας πτήσης κάποιας αεροπορικής εταιρείας είναι τουλάχιστον 10 κιλά αλλά μικρότερο από 35 κιλά. Γνωρίζουμε ότι 16 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 15 κιλά, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά, 96 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 25 κιλά και το 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 30 κιλά.
Αφού παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων και δεδομένου ότι κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 22 κιλών, ποια είναι η πιθανότητα ένας επιβάτης που θα επιλεγεί στην τύχη να έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση;

Α. 58%   Β. 85%   Γ. 67%   Δ. 40%

Λύση

$\nu = 160$

$\nu_1 = 16$, άρα $N_1 = 16$

$f_1\% = \frac{\nu_1}{\nu} \cdot 100 = \frac{16}{160} \cdot 100 = 10\% = F_1\%$

$F_2\% = 30\%$

$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 30\% - 10\% = 20\%$

$\nu_2 = \nu \cdot f_2 = 160 \cdot 0{,}2 = 32$

$N_2 = \nu_1 + \nu_2 = 16 + 32 = 48$

$N_3 = 96$

$\nu_3 = N_3 - N_2 = 96 - 48 = 48$

$f_3\% = \frac{\nu_3}{\nu} \cdot 100 = \frac{48}{160} \cdot 100 = 30\%$

$f_5\% = 15\%$, άρα $\nu_5 = 24$.

Με αφαίρεση προκύπτει $f_4\% = 25\%$, άρα $\nu_4 = 40$, κ.λπ.

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ο πίνακας:

	x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
[10, 15)	12,5	16	16	10	10
[15, 20)	17,5	32	48	20	30
[20, 25)	22,5	48	96	30	60
[25, 30)	27,5	40	136	25	85
[30, 35)	32,5	24	160	15	100
Σύνολο		**160**		**100**	

Είναι γνωστό ότι σε κάθε κλάση οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα. Επομένως,
Κάτω από 22 κιλά αντιστοιχούν στις κλάσεις [10, 15), [15, 20) και στα 2/5 της κλάσης [20, 25) με ποσοστά $10\% + 20\% + \frac{2}{5} \cdot 30\% = 42\%$.

Πάνω από 22 κιλά αντιστοιχεί στα 3/5 της κλάσης [20, 25) και στις κλάσεις [25, 30) και [30, 35), με ποσοστά $\frac{3}{5} \cdot 30\% + 25\% + 15\% = 58\%$.

Άρα, η πιθανότητα ένας επιβάτης που θα επιλεγεί στην τύχη να έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση, γιατί μεταφέρει αποσκευές με βάρος μεγαλύτερο των 22 κιλών, είναι 58%.

Άσκηση 7

Τρεις φίλοι, ο Άρης, ο Βασίλης και ο Γιώργος, μοιράζουν ένα ποσό 240€ μεταξύ τους με τέτοιον τρόπο ώστε τα ποσά που θα λάβουν να έχουν αναλογία 6 : 18 : 24. Ποια είναι η διάμεση τιμή των ποσών που θα πάρει ο καθένας;

Α. 60€

Β. 80€

Γ. 90€

Δ. 120€

Λύση

Έστω Α το ποσό του Άρη, Β το ποσό του Βασίλη και Γ το ποσό του Γιώργου. Θέλουμε να ισχύει:

$$\frac{A}{B} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \Rightarrow B = 3A \; και \; \frac{A}{\Gamma} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow \Gamma = 4A$$

Επιπλέον ισχύει:
Α + Β + Γ = 240
Α + 3Α + 4Α = 240
8Α = 240
Α = 30

Επομένως, ο Άρης θα πάρει 30€, ο Βασίλης 3*30=90€ και ο Γιώργος 4*30=120€.
Η διάμεσος ισούται με το ποσό του Βασίλη δηλ. 90€.

Άσκηση 8

Σε ένα σχολείο, αν μια σχολική χρονιά επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, η πιθανότητα να είναι κορίτσι είναι 0,525. Την επόμενη σχολική χρονιά, ο αριθμός των μαθητών αυξήθηκε κατά 40. Ωστόσο, αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, η πιθανότητα να είναι κορίτσι είναι πάλι 0,525. Το πλήθος των κοριτσιών αυξήθηκε κατά:

Α. 19 Β. 21 Γ. 23 Δ. 24

Λύση

Πέρυσι:

$P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} = 0{,}525 \Leftrightarrow N(K) = 0{,}525 \cdot N(\Omega)$

Φέτος:

Έστω ότι από τους 40 μαθητές οι x είναι κορίτσια.

$P(K) = \frac{N(K)+x}{N(\Omega)+40} \Leftrightarrow 0{,}525 = \frac{0{,}525 \cdot N(\Omega)+x}{N(\Omega)+40} \Leftrightarrow$

$0{,}525 \cdot N(\Omega) + 21 = 0{,}525 \cdot N(\Omega) + x \Leftrightarrow x = 21.$

Άσκηση 9

Τα έξοδα και τα έσοδα μιας εταιρείας (σε χιλιάδες ευρώ) για την περίοδο 2014-2016 δίνονται στον παρακάτω πίνακα. Εάν τα μέσα έξοδα αναμένεται να είναι 25% υψηλότερα κατά την επόμενη 5ετία, ποια πρέπει να είναι τα μέσα έσοδα για την περίοδο 2017-2021, ώστε το συνολικό μέσο κέρδος της 8ετούς περιόδου 2014-2021 να είναι 10.000 ευρώ;

ΕΤΟΣ	2014	2015	2016
ΕΞΟΔΑ	60	80	40
ΕΣΟΔΑ	50	60	90

Α. 57.000 €

Β. 67.000 €

Γ. 77.000 €

Δ. 87.000 €

Λύση

Τα πρώτα 3 χρόνια:

Συνολικά έξοδα = 60 + 80 + 40 = 180

Μέσα έξοδα = 180/3 = 60

Συνολικά έσοδα = 50 + 60 + 90 = 200

Συνολικό κέρδος 3ετίας = 200 – 180 = 20

Τα επόμενα 5 χρόνια:

Μέσα έξοδα = (1,25)·60 = 75

Μέσα έσοδα = x

Μέσο κέρδος 5ετίας = Μέσα έσοδα – Μέσα έξοδα = x – 75

Συνολικό κέρδος 5ετίας = 5(x – 75)

Η (συνολική) 8ετής περίοδος:

Μέσο κέρδος = (Συνολικό κέρδος 8ετίας)/8

[20 + 5(x – 75)]/8 = 10

20 + 5x – 375 = 80

5x = 435

x = 87 χιλιάδες ευρώ

Άσκηση 10

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Εάν σε ν αριθμούς εισάγουμε έναν επιπλέον αριθμό ίσο με τη μέση τιμή των ν, τότε ο μέσος όρος παραμένει σταθερός .
β) Εάν διαιρέσουμε ν αριθμούς με τον μέσο όρο τους και υπολογίσουμε ξανά τη μέση τιμή, αυτή θα είναι μικρότερη του 1.
γ) Το άθροισμα των διαφορών ν αριθμών από τη μέση τιμή τους ισούται με το 0.
δ) Το εύρος = μέγιστη τιμή – ελάχιστη τιμή ν αριθμών αυξάνεται, εάν αθροίσουμε σε καθέναν από τους αριθμούς το 1/2.

Α. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ

Β. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ

Γ. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ

Δ. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ

Λύση:

α) Αρχική μέση τιμή: $\mu = (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) / \nu \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = \nu\mu$

Στους ν αριθμούς εισάγουμε έναν αριθμό ίσο με μ και η μέση τιμή γίνεται:

Νέα μέση τιμή: $\mu' = (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu+\mu) /(\nu+1) = (\nu\mu+\mu)/(\nu+1) = \mu(\nu+1)/(\nu+1)=\mu$.

β) Αρχική μέση τιμή: $\mu = (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) / \nu$

Νέα μέση τιμή: $\mu' = (x_1/\mu + x_2/\mu + \ldots + x_\nu/\mu) / \nu = (1/\mu)(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) / \nu = (1/\mu) * \mu = 1$

Επομένως, η νέα μέση των αριθμών δεν είναι μικρότερη του 1 και η πρόταση είναι λάθος.

γ) Αρχική μέση τιμή: $\mu = (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) / \nu \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = \nu\mu$

Διαφορές από μέση τιμή: $\mu-x_1, \mu-x_2, \ldots, \mu-x_\nu$

Άθροισμα διαφορών: $(\mu-x_1+\mu-x_2+ \ldots + \mu-x_\nu) = \nu\mu - (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) = \nu\mu-\nu\mu=0$.

δ) Αρχική διάταξη αριθμών: $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ και εύρος $d = x_\nu - x_1$

Νέα διάταξη αριθμών: $x_1 +1/2, x_2 +1/2, \ldots, x_\nu +1/2$ και εύρος $d' = x_\nu +1/2 - (x_1 + 1/2) = x_\nu - x_1 = d$.

Επομένως, το εύρος των αριθμών παραμένει σταθερό και η πρόταση είναι λάθος.

ΕΚΔΟΧΗ 3

Άσκηση 1

Κάποιος θέλει να δημιουργήσει έναν τριψήφιο φυσικό αριθμό για PIN ως εξής: το ψηφίο των εκατοντάδων είναι το 1 ή το 2, το ψηφίο των δεκάδων είναι κάποιος από τους αριθμούς 0, 4, 8 και το ψηφίο των μονάδων είναι κάποιος από τους αριθμούς 3, 5, 6, 7. Η πιθανότητα ο αριθμός που θα δημιουργηθεί να είναι πρώτος είναι:

Α. 8,33%

Β. 12,50%

Γ. 16,67%

Δ.20,83%

Λύση

Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από τους παρακάτω 24 τριψήφιους:
Ω = {103, 105, 106, 107, 143, 145, 146, 147, 183, 185, 186, 187, 203, 205, 206, 207, 243, 245, 246, 247, 283, 285, 286, 287}.
Οι αριθμοί: 106, 146, 186, 206, 246, 286 είναι άρτιοι (πολλαπλάσια του 2, δεν είναι πρώτοι).
Οι αριθμοί: 105, 145, 185, 205, 245, 285 τελειώνουν σε 5 (είναι πολλαπλάσια του 5, δεν είναι πρώτοι).
Οι αριθμοί: 147, 183, 207, 243 έχουν άθροισμα ψηφίων που διαιρείται με το 3 (είναι πολλαπλάσια του 3, δεν είναι πρώτοι).
Οι αριθμοί: 143, 187 είναι πολλαπλάσια του 11 ($143 = 11 \cdot 13$, $187 = 11 \cdot 17$).
Οι αριθμοί: 203, 287 είναι πολλαπλάσια του 7 ($203 = 7 \cdot 29$, $287 = 7 \cdot 41$).
Ο αριθμός: $247 = 13 \cdot 19$.
Οι υπόλοιποι αριθμοί: 103, 107, 283 είναι πρώτοι.
Έχουμε το σύνολο Α = {103, 107, 283}, με Ν(Α) = 3. Ισχύει:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{24} = 12{,}5\%$$

Άσκηση 2

Η διάμεσος των παρακάτω 4.040 αριθμών

1, 2, 3, . . . , 2.020, 1^2, 2^2, 3^2, . . . , 2.020^2

είναι:

Α. 2.020,5 **Β.** 1.010,5 **Γ.** 1.976,5 **Δ.** 1.987,5

Λύση

Το πλήθος των αριθμών είναι άρτιο, επομένως η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων αριθμών, δηλαδή ο μέσος όρος του 2.020ου και του 2.021ου αριθμού.

Για να βρεθεί η διάμεσος θα πρέπει οι αριθμοί να γραφούν με σειρά μεγέθους.

Παρατηρούμε ότι:

$1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, …, $44^2 = 1.936$.

Άρα, μέχρι και το 1.936 υπάρχουν 1.936 + 44 = 1.980 αριθμοί.

Για να βρούμε τον 2.020ο αριθμό θα πρέπει στον 1.980ο αριθμό, δηλαδή στον 1.936, να προσθέσουμε 40.

Επομένως, ο 2020ος αριθμός είναι ο 1.976, ο 2021ος αριθμός είναι ο 1.977 και η διάμεσος είναι δ = (1.976 + 1.977)/2 = 1.976,5.

Άσκηση 3

Ο Αλέξης και ο Βασίλης έχουν ο καθένας από μία τσάντα με 12 μπάλες αριθμημένες από το 1 έως και το 12. Καθένας αφαιρεί μία τυχαία μπάλα από τη δική του τσάντα. Έστω Α το άθροισμα των αριθμών στις μπάλες που απομένουν στην τσάντα του Αλέξη και Β το άθροισμα των αριθμών στις μπάλες που απομένουν στην τσάντα του Βασίλη. Η πιθανότητα τα Α και Β να διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 5 είναι:

Α. 13,89%

Β. 20,83%

Γ. 27,78%

Δ. 34,72%

Λύση

N(Ω) = 144.

Ισχύει: 1 + 2 + 3 + … + 12 = 78.

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός της μπάλας που αφαιρεί ο Αλέξης είναι μ με $1 \leq \mu \leq 12$ και ότι ο αριθμός της μπάλας που αφαιρεί ο Βασίλης είναι ν με $1 \leq \nu \leq 12$.

Τότε Α = 78 – μ και Β = 78 – ν και Α – Β = (78 – μ) – (78 – ν) = ν – μ.

Θα πρέπει το (ν – μ) να είναι πολλαπλάσιο του 5. Γνωρίζουμε ότι **ένας αριθμός διαιρείται με το 5**, αν τελειώνει σε 0 ή σε 5. Θα πρέπει:

(ν, μ)∈A= {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9), (10, 10), (11, 11), (12, 12), (1, 6), (1, 11), (2, 7), (2, 12), (3, 8), (4, 9), (5, 10), (6, 1), (6, 11), (7, 2), (7, 12), (8, 3), (9, 4), (10, 5), (11, 1), (11, 6), (12, 2), (12,7)}

N(A) = 30. Άρα P(A) = $\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{30}{144} = \frac{5}{24} = 0{,}2083$.

Άσκηση 4

Δύο αριθμοί α και β, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικοί μεταξύ τους, επιλέγονται τυχαία από το σύνολο των πρώτων 10 θετικών ακεραίων {1, 2, …, 10}. Ποια είναι η πιθανότητα η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους, |α – β|, να είναι μικρότερη ή ίση του 5;

Α. 20% Β. 40% Γ. 60% Δ. 80%

Λύση

Έστω $A_i = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}, |a - b| = \{i\}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

$A_0 = \{(i, i) | i = 1, 2, 3, \dots, 10\}$ και $|A_0| = 10$

$A_1 = \{(i, i + 1) | i = 1, 2, 3, \dots, 9\} \cup \{(i, i - 1) | i = 2, 3, \dots, 10\}$ και $|A_1| = 9 + 9 = 18$

$A_2 = \{(i, i + 2) | i = 1, 2, 3, \dots, 8\} \cup \{(i, i - 2) | i = 3, 4, \dots, 10\}$ και $|A_2| = 8 + 8 = 16$

$A_3 = \{(i, i + 3) | i = 1, 2, \dots, 7\} \cup \{(i, i - 3) | i = 4, 5, \dots, 10\}$ και $|A_3| = 7 + 7 = 14$

$A_4 = \{(i, i + 4) | i = 1, 2, \dots, 6\} \cup \{(i, i - 4) | i = 5, 6, \dots, 10\}$ και $|A_4| = 6 + 6 = 12$

$A_5 = \{(i, i + 5) | i = 1, 2, \dots, 5\} \cup \{(i, i - 5) | i = 6, 7, \dots, 10\}$ και $|A_5| = 5 + 5 = 10$

Αριθμός ευνοϊκών περιπτώσεων: N(A) = 10 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 = 80

Αριθμός δυνατών περιπτώσεων N(Ω) = 10 × 10 = 100

P(A) = N(A)/N(Ω) = 80/100 = 80%

Άσκηση 5

Εάν η διάμεσος των αριθμών -10, 29, 6, 11, 31, και x είναι 20, ποια είναι η ελάχιστη δυνατή μέση τιμή των αριθμών;

Α. 11

Β. 16

Γ. 20

Δ. 29

Λύση:

Έχουμε συνολικά 6 αριθμούς $α_1$, $α_2$, $α_3$ $α_4$ $α_5$, $α_6$, επομένως η διάμεσός τους θα ισούται με τη μέση τιμή του 3ου και 4ου όρου, δηλ. $20 = (α_3+α_4)/2 \Leftrightarrow α_3+α_4 = 40$.

Ο μόνος άγνωστος είναι ο x και η μέση τιμή των 6 αριθμών θα είναι η ελάχιστη, εάν η τιμή του x είναι η ελάχιστη δυνατή.

Η αύξουσα σειρά των 5 γνωστών αριθμών είναι:

-10, 6, 11, 29, 31,

και ο x πρέπει να τοποθετηθεί στη σωστή θέση.

Δεδομένου ότι ο x μπορεί να πάρει διάφορες τιμές, ελέγχουμε τις διαφορετικές περιπτώσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη ότι η διάμεσος ισούται με 20 ή την ισοδύναμη σχέση $α_3+α_4 = 40$.

Περίπτωση 1: $x \le 11$

Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $α_4 = 11$

και επειδή και $α_3 \le 11$, θα ισχύει $α_3+α_4 \le 22$, δηλ. δε θα ικανοποιείται η σχέση $α_3+α_4 = 40$.

Περίπτωση 2: $11 < x < 29$

Στην περίπτωση αυτή η διάταξη των 6 αριθμών θα είναι: -10, 6, 11, x, 29, 31.

Θα έχουμε $α_3 = 11$ και $α_4 = x$ και επιπλέον η μεγαλύτερη τιμή του $α_4$ θα είναι < 29.

Επομένως, $α_3 + α_4 < 40$, δηλ. δε θα ικανοποιείται η σχέση $α_3+α_4 = 40$.

Περίπτωση 3: $x \ge 29$

Στην περίπτωση αυτή διακρίνουμε 3 υποπεριπτώσεις:

- Για x=29, τότε οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής: -10, 6, 11, 29, 29, 31

- Για 29<x ≤31, τότε οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής: -10, 6, 11, 29, x, 31
- Για x>31, τότε οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής: -10, 6, 11, 29, 31, x

Και στις 3 υποπεριπτώσεις έχουμε $α_3$=11 και $α_4$=29, επομένως η σχέση $α_3+α_4$ = 40 ικανοποιείται σε όλες τις περιπτώσεις και η ελάχιστη τιμή του x θα είναι το 29.
Άρα, η ελάχιστη μέση τιμή θα είναι:
$(α_1 + α_2 + α_3 + α_4 + α_5 + α_6)/6 = (-10+6+11+29+29+31)/6 = 96/6 = 16$.

Άσκηση 6

Να βρεθεί η τιμή του α>0, εάν η μέση τιμή της παρακάτω κατανομής αριθμών είναι 20.

Τιμή x:	15	17	19	20 + a	23
Συχνότητα f:	2	3	4	5a	6

Α. $\sqrt{5}$

Β. 1,2

Γ. 1/2

Δ. 1

Λύση:

x_i	f_i	$x_i f_i$
15	2	30
17	3	51
19	4	76
20 + α	5α	(20 + α) 5α
23	6	138
Άθροισμα	15 + 5α	295 + (20 +α) 5α

Μέση τιμή = 20, άρα:

$20 = [(295 + (20 + α) 5α)]/(15 + 5α)$

$295 + 100α+ 5α^2 = 300 + 100α$

$5α^2 = 300 – 295$

$5α^2= 5$

$α^2 = 1$

$α= 1$

Άσκηση 7

Εάν δύο σύνολα Α=$\{-10,-3,y^2,9,10,11\}$ και Β = $\{0,2,-2y,12,13,15\}$ έχουν τα στοιχεία τους διατεταγμένα σε αύξουσα σειρά και έχουν ίσες διαμέσους, ποια είναι η τιμή του y;

Α. -3
Β. -2
Γ. -1
Δ. 1

Λύση:
Το σύνολο Α έχει 6 στοιχεία και η διάμεσος θα ισούται με τη μέση τιμή του 3ο και 4ου όρου, δηλ. $(y^2+9)/2$.
Το σύνολο Β έχει επίσης 6 στοιχεία και η διάμεσος θα ισούται με τη μέση τιμή του 3ο και 4ου όρου, δηλ. $(-2y+12)/2$.
Επειδή το Α και Β έχουν ίση διάμεσο θα ισχύει:
$(y^2+9)/2=(-2y+12)/2 \Rightarrow y^2+2y-3=0$ $(y+3)(y-1)=0$ $y=-3$ or 1.

Για y=1 το σύνολο Β θα ήταν {0,2,−2,12,13,15}, δηλαδή τα στοιχεία του δε θα βρίσκονταν σε αύξουσα σειρά. Επομένως, η τιμή 1 απορρίπτεται και η μόνη δυνατή τιμή για το y είναι -3, για την οποία τα σύνολα Α και Β γίνονται:
A = {−10, −3, 9, 9, 10, 11}

B = {0, 2, 6, 12, 13, 15}

Άσκηση 8

Δίνεται ο αριθμός $x = 0,123456789101112 \ldots 998999$ του οποίου τα δεκαδικά ψηφία λαμβάνονται γράφοντας με τη σειρά τους ακέραιους αριθμούς 1 έως 999. Ποιο είναι το 2001ο ψηφίο και ποια η διάμεσος των διαδοχικών ακέραιων αριθμών που εμφανίζονται μέχρι το ψηφίο αυτό;

Α. ψηφίο=1 και διάμεσος = 99

Β. ψηφίο = 0 και διάμεσος = 302

Γ. ψηφίο = 3 και διάμεσος = 352

Δ. ψηφίο = 7 και διάμεσος = 399

Λύση

Έστω ότι το z υποδηλώνει το 2001ο ψηφίο. Μπορούμε να χωρίσουμε αυτή τη σειρά των ψηφίων σε τρία τμήματα:

123456789	1011…9899	100101…z
A	B	C

Υπάρχουν: 9 ψηφία στο τμήμα Α,
2·90 = 180 ψηφία στο Β, και επομένως
2.001 – 189 = 1.812 στο C.

Διαιρώντας το 1.812 με 3 παίρνουμε πηλίκο 604 και υπόλοιπο 0. Έτσι, το C αποτελείται από τους πρώτους 604 τριψήφιους ακέραιους αριθμούς. Δεδομένου ότι ο πρώτος τριψήφιος ακέραιος αριθμός είναι 100, ο 604ος 3ψήφιος ακέραιος είναι ο 604 + 99 = 703.
Άρα z = 3.
Εφόσον οι εμφανιζόμενοι διαδοχικοί ακέραιοι είναι 703, η διάμεσός τους θα ισούται με τον ακέραιο στη μεσαία θέση, δηλαδή θα είναι ο αριθμός 352.

Άσκηση 9
Δίνονται οι αριθμοί:
0, 15, 30, 45, 60, 75, 90.
Εάν επιλέξουμε ταυτόχρονα και με τυχαίο τρόπο δύο από αυτούς, ποια είναι η πιθανότητα οι τιμές, εκφρασμένες σε μοίρες, να αντιστοιχούν στις οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου;

Α. 9,5%

Β. 14,3%

Γ. 28,6%

Δ. 10,2%

Λύση

Οι οξείες γωνίες ορθογώνιου τριγώνου έχουν άθροισμα 90^{o}.
Οι δυνατές περιπτώσεις είναι 21:
(0, 15), (0, 30), (0, 45) (0, 60), (0, 75), (0, 90)
(15, 30), (15, 45), (15, 60), (15, 75), (15, 90)
(30, 45), (30, 60), (30, 75), (30, 90)
(45, 60), (45, 75), (45, 90)
(60, 75), (60, 90)
(75, 90)
Και οι ευνοϊκές είναι 2:
(15, 75), (30, 60)
Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι: 2/21.

Άσκηση 10
Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Εάν αφαιρέσουμε από ν αριθμούς τη σταθερά α, η μέση τιμή τους παραμένει σταθερή.

β) Εάν πολλαπλασιάσουμε ν αριθμούς με τη σταθερά λ, η μέση τιμή τους πολλαπλασιάζεται επί λ.

γ) Εάν από ν αριθμούς διαγράψουμε έναν αριθμό ίσο με την μέση τιμή των ν, τότε ο μέσος όρος παραμένει σταθερός.

δ) Το εύρος = μέγιστη τιμή – ελάχιστη τιμή ν αριθμών μειώνεται, εάν αφαιρέσουμε από καθέναν από τους αριθμούς το 2.

Α. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ

Β. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Λ

Γ. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ

Δ. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ

Λύση:

α) Αρχική μέση τιμή: $\mu = (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) / \nu$

Μετά την αφαίρεση της σταθεράς α από όλους τους αριθμούς, βρίσκουμε ότι η μέση τιμή δεν παραμένει σταθερή: $\mu' = [(x_1 - \alpha) + (x_2 - \alpha) + \ldots + (x_\nu - \alpha)] / \nu = (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu - \nu\cdot\alpha)/\nu = \mu - \alpha$.

β) Αρχική μέση τιμή: $\mu = (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) / \nu$

Μετά τον πολλαπλασιασμό με τη σταθερά λ όλων των αριθμών, βρίσκουμε για τη νέα μέση τιμή μ' ότι ισούται με:

$\mu' = (\lambda\cdot x_1 + \lambda\cdot x_2 + \ldots + \lambda\cdot x_\nu) / \nu = \lambda\cdot(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu)/\nu = \lambda\cdot\mu$.

γ) Αρχική μέση τιμή: $\mu = (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) / \nu \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = \nu\mu$

Στους ν αριθμούς διαγράφουμε έναν αριθμό ίσο με μ και η μέση τιμή γίνεται:

Νέα μέση τιμή: $\mu' = (x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu - \mu)/(\nu-1) = (\nu\mu-\mu)/(\nu-1) = \mu(\nu-1)/(\nu-1)=\mu$.

δ) Αρχική διάταξη αριθμών: $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ και εύρος $d = x_\nu - x_1$

Νέα διάταξη αριθμών: $x_1 -2, x_2 -2, \ldots, x_\nu -2$ και εύρος $d' = x_\nu -2 - (x_1 -2) = x_\nu - x_1 = d$

Επομένως, το εύρος των αριθμών παραμένει σταθερό και η πρόταση είναι λάθος.

ΤΕΣΤ 2

1. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2012, οι άνεργοι άρρενες (σε χιλιάδες) στην Ελλάδα ήταν:

595,2

117,3

192,9

288,3

https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SJO03/- (Έρευνα Εργατικού Δυναμικού - Άνεργοι (1981 - 2022)

2.Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2021, σε ποια Περιφερειακή Ενότητα είχαμε τον μεγαλύτερο αριθμό κλινών σε ξενοδοχεία και ομοειδή καταλύματα;

Ρόδου

Νοτίου Αιγαίου

Ηρακλείου

Χαλκιδικής

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) (1.Δυναμικότητα καταλυμάτων ξενοδοχειακού τύπου και κάμπινγκ)

3. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), πόσες υιοθεσίες πραγματοποιήθηκαν στην Ελλάδα κατά το έτος 2021;

184

83

101

44

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) Υιοθεσίες που πραγματοποιήθηκαν κατά Γεωγραφική Περιφέρεια και φύλο. Έτος 2021

4. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), ποιος είναι ο Νόμιμος Πληθυσμός (δημότες) στην Ελλάδα σύμφωνα με την Απογραφή Πληθυσμού-Κατοικιών 2021;

9.716.889

10.482.487

8.716.889

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://www.statistics.gr/el/2021-census-legal-pop-results

5.Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2020, πόσοι ήταν οι φυσικοθεραπευτές στην Περιφέρεια Αττικής;

9.238

4.156

3.961

2.193

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) (Φυσικοθεραπευτές κατά γεωγραφική περιφέρεια: 2015-2020)

6.Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2021, σε ποιον από τους παρακάτω μήνες σημειώθηκαν τα περισσότερα οδικά τροχαία ατυχήματα;

Ιούνιος

Ιούλιος

Αύγουστος

Σεπτέμβριος

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) (Χρονοσειρά 02.Οδικά τροχαία ατυχήματα, βασικά χαρακτηριστικά (2007-2021)

7.Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2022, ποια ήταν η αξία (σε χιλιάδες ευρώ) των αλιευμάτων που αλιεύθηκαν με γρι-γρι στην Ελλάδα;

52.164,6

60.208,2

40.908,2

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SPA03/-

08. Ποσότητα και αξία αλιευμάτων κατά τύπο αλιευτικού εργαλείου

EUROSTAT

8.Σύμφωνα με τα στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, η χώρα της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ) με τη μεγαλύτερη μέση ηλικία πρώτου γάμου για γυναίκες, το έτος 2021, ήταν:

Ισπανία

Δανία

Ρουμανία

Ιταλία

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/DEMO_NIND/default/table?lang=en

9.Σύμφωνα με τα στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, τα έξοδα της Γενικής Κυβέρνησης ως ποσοστό του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (ΑΕΠ) για την ΕΕ27, το έτος 2021, ήταν:

51,3

45,8

55,8

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/TEC00023/default/table?lang=en&category=gov.gov_gfs10.gov_10a

(Συνολικές δαπάνες γενικής κυβέρνησης)

10.Σύμφωνα με τα στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποια από τις παρακάτω χώρες είχε το υψηλότερο ποσοστό εκτέλεσης σωματικής δραστηριότητας για τη βελτίωση της υγείας (αερόβια και μυϊκή ενδυνάμωση), κατά το έτος 2019;

Ισλανδία
Σουηδία
Ολλανδία
Φινλανδία

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/HLTH_EHIS_PE9U$DV_471/default/table?lang=en&category=sprt.sprt_pcs.sprt_pcs_pha

ΤΕΣΤ 3

1. Σύμφωνα με το infographic της ΕΛΣΤΑΤ «Στοιχεία φυσικής κίνησης πληθυσμού 2021», μεταξύ των ετών 1932 - 2010, σε ποιο έτος είχαμε τις λιγότερες γεννήσεις στην Ελλάδα;

1990

1980

2000

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

infographic-vital-statistics-survey-2021 - ELSTAT

2. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, το έτος 2021 ποια ημέρα της εβδομάδας συνέβησαν οδικά τροχαία ατυχήματα με τη μεγαλύτερη συχνότητα;

Κυριακή

Σάββατο

Παρασκευή

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

infographic-road-accidents-2021 - ELSTAT (statistics.gr)

3.Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, το έτος 2021, πόση ήταν η ποσοστιαία μεταβολή στην παραγωγή του αυγοτάραχου στην Ελλάδα, σε σχέση με το έτος 2020;

+168,3%

+31,6%

+15,2%

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

infographic-aquaculture-2021 - ELSTAT (statistics.gr)

4.Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, το έτος 2022, με ποιες χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης πραγματοποίησε η Ελλάδα τις περισσότερες εμπορευματικές συναλλαγές (εξαγωγές – εισαγωγές);

Εξαγωγές Εισαγωγές

Ιταλία Γερμανία

Ιταλία Ρωσία

Ιταλία Ιταλία

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

infographic-com-trans-2022 - ELSTAT (statistics.gr)

5.Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, το έτος 2020, σε ποιον τομέα οικονομικής δραστηριότητας είχαμε τη μεγαλύτερη εκπομπή διοξειδίου του άνθρακα (CO_2) στην Ελλάδα;

Μεταποίηση

Μεταφορές και αποθήκευση

Παροχή ηλεκτρικού ρεύματος κ.ά.

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://www.statistics.gr/el/infographic-air-emission-2020

6. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, το έτος 2022, ποιος ήταν ο συνολικός αριθμός βοοειδών στην Ελλάδα;

*** Εκ παραδρομής οι απαντήσεις που έχουν εισαχθεί στην πλατφόρμα δεν αντιστοιχούν στην ερώτηση και ως εκ τούτου η ερώτηση αυτή δεν έχει ληφθεί καθόλου υπόψη.**

7.Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, το έτος 2021, ποια ήταν η αξία των αλιευμάτων στην Ελλάδα, σε χιλιάδες ευρώ;

234.417,1

58.365,1

23.673,5

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις
infographic-sea-fishery-2021 - ELSTAT (statistics.gr)

EUROSTAT

8.Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat "Sustainable development goals (SDGs)", έκδοσης 2023, ποια από τις παρακάτω χώρες είχε το μικρότερο ποσοστό (%), στο σύνολο του πληθυσμού, ατόμων που διατρέχουν κίνδυνο φτώχειας ή κοινωνικού αποκλεισμού, κατά το έτος 2021;

Τσεχία

Ουγγαρία

Βουλγαρία

Εσθονία

Οι Στόχοι Βιώσιμης Ανάπτυξης (SDGs) και εγώ - έκδοση 2023 (europa.eu) (1)

9. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat “Sustainable development goals (SDGs)”, έκδοσης 2023, ποια από τις παρακάτω χώρες είχε το μικρότερο ποσοστό (%), στο σύνολο του πληθυσμού ηλικίας 18 έως 24 ετών, ατόμων που εγκαταλείπουν πρόωρα την εκπαίδευση και την κατάρτιση, κατά το έτος 2022;

Ολλανδία

Σουηδία

Φινλανδία

Ελλάδα

Οι Στόχοι Βιώσιμης Ανάπτυξης (SDGs) και εγώ - έκδοση 2023 (europa.eu) (1/4)

10. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat “Sustainable development goals (SDGs)”, έκδοσης 2023, ποια από τις παρακάτω χώρες είχε τη μεγαλύτερη κατά κεφαλήν κατανάλωση ενέργειας στα νοικοκυριά (σε kg ισοδύναμου πετρελαίου), κατά το έτος 2021;

Γερμανία

Σουηδία

Φινλανδία

Αυστρία

Sustainable Development Goals (SDGs) and me - 2023 edition (europa.eu) (2/4)