Ασκήσεις 2024-2025

Λύκειο

Εκδοχή 1

1. Μία τσάντα περιέχει δύο κόκκινες και δύο πράσινες χάντρες. Βγάζουμε από την τσάντα μία χάντρα στην τύχη και την αντικαθιστούμε με μία κόκκινη χάντρα. Η πιθανότητα όλες οι χάντρες μέσα στην τσάντα να είναι κόκκινες μετά από τρεις τέτοιες αντικαταστάσεις είναι περίπου:

Α. 12,50%
Β. 15,63%
Γ. 28,13%
Δ. 37,50%

ΛΥΣΗ

Στην αρχή μέσα στην τσάντα υπάρχουν 2 Πράσινες (2Π) και 2 Κόκκινες χάντρες (2Κ).
Υπάρχουν 3 δυνατές περιπτώσεις
Περίπτωση 1 (ΠΠΚ)
α) Βγάζουμε μια πράσινη (πιθανότητα 2/4) και την αντικαθιστούμε με κόκκινη.
Στην τσάντα τώρα υπάρχουν 1Π και 3Κ
β) Βγάζουμε μια πράσινη (πιθανότητα 1/4) και την αντικαθιστούμε με κόκκινη.
Στην τσάντα υπάρχουν τώρα 4Κ
γ) Βγάζουμε μια κόκκινη (πιθανότητα 4/4) και την αντικαθιστούμε με κόκκινη.
Στην τσάντα υπάρχουν τώρα 4Κ
Η πιθανότητα αυτής της περίπτωσης είναι: $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{8}$
Περίπτωση 2 (ΠΚΠ)
α) Βγάζουμε μια πράσινη (πιθανότητα 2/4) και την αντικαθιστούμε με κόκκινη.
Στην τσάντα τώρα υπάρχουν 1Π και 3Κ
β) Βγάζουμε μια κόκκινη (πιθανότητα 3/4) και την αντικαθιστούμε με κόκκινη.
Στην τσάντα τώρα υπάρχουν 1Π και 3Κ
γ) Βγάζουμε μια πράσινη (πιθανότητα 1/4) και την αντικαθιστούμε με κόκκινη.
Στην τσάντα υπάρχουν τώρα 4Κ
Η πιθανότητα αυτής της περίπτωσης είναι: $\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$
Περίπτωση 3 (ΚΠΠ)
α) Βγάζουμε μια κόκκινη (πιθανότητα 2/4) και την αντικαθιστούμε με κόκκινη.
Στην τσάντα τώρα υπάρχουν 2Π και 2Κ
β) Βγάζουμε μια πράσινη (πιθανότητα 2/4) και την αντικαθιστούμε με κόκκινη.
Στην τσάντα τώρα υπάρχουν 1Π και 3Κ
γ) Βγάζουμε μια πράσινη (πιθανότητα 1/4) και την αντικαθιστούμε με κόκκινη.
Στην τσάντα υπάρχουν τώρα 4Κ
Η πιθανότητα αυτής της περίπτωσης είναι: $\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
Αν προσθέσουμε τις πιθανότητες των 3 περιπτώσεων προκύπτει η ζητούμενη πιθανότητα
$\frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} = \frac{4}{32} + \frac{3}{32} + \frac{2}{32} = \frac{9}{32}$ = 0,2813 ή 28,13%.

2. Εάν πάρουμε τρεις διακριτούς αριθμούς από το σύνολο {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, η πιθανότητα ένας από αυτούς να είναι το άθροισμα των άλλων δύο είναι περίπου:

Α. 10,15%
Β. 19,05%
Γ. 33,33%
Δ. 66,67%

ΛΥΣΗ

Λαμβάνοντας 3 αριθμούς από τους 9 δημιουργούνται
$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{6}$ = 84 τριάδες.
Επομένως, N(Ω) = 84
Εάν ο 1 είναι μικρότερος από τους τρεις, τότε προκύπτουν 7 αθροίσματα:
1 + 2 = 3, 1 + 3 = 4, …, 1 + 8 = 9.
Εάν ο 2 είναι ο μικρότερος από τους τρεις, τότε προκύπτουν 5 αθροίσματα:
2 + 3 = 5, 2Εάν ο 3 είναι ο μικρότερος από τους τρεις, τότε προκύπτουν 3 αθροίσματα:
3 + 4 = 7, 3 + 5 = 8, 3 + 6 = 9.
Εάν ο 4 είναι ο μικρότερος από τους τρεις, τότε προκύπτει 1 άθροισμα:
4 + 5 = 9.
Συνολικά έχουμε 7 + 5 + 3 + 1 = 16 ευνοϊκές περιπτώσεις.
P(A) = N(A)/N(Ω) = 16/84 = 0,1905 ή 19,05%.

3. Ένα εργοστάσιο κατασκευής μικροεπεξεργαστών συσκευάζει τα προϊόντα του σε κιβώτια των 1.000 τεμαχίων, τα οποία αποστέλλονται στους αγοραστές. Το Τμήμα Ποιοτικού Ελέγχου έχει τρεις επιλογές πριν την αποστολή ενός κιβωτίου σε αγοραστή:

I. Να αποστείλει το κιβώτιο χωρίς να πραγματοποιήσει κανέναν έλεγχο.

II. Να ακολουθήσει μία διαδικασία ελέγχου όπου το 20% των ελαττωματικών μικροεπεξεργαστών του κιβωτίου διαφεύγουν τον έλεγχο και αποστέλλονται στον αγοραστή ως μη ελαττωματικοί. Στην περίπτωση αυτή, ο έλεγχος κάθε μικροεπεξεργαστή του κιβωτίου κοστίζει στην εταιρεία 2 ευρώ.

III. Να ακολουθήσει μία διαδικασία ελέγχου τέτοια ώστε κανένας ελαττωματικός μικροεπεξεργαστής του κιβωτίου να μη διαφεύγει τον έλεγχο. Στην περίπτωση αυτή, ο έλεγχος κάθε μικροεπεξεργαστή του κιβωτίου κοστίζει στην εταιρεία 3 ευρώ.

Ένας ελαττωματικός μικροεπεξεργαστής που εντοπίζεται κατά τη διαδικασία του ελέγχου μπορεί να επιδιορθωθεί από την εταιρεία με κόστος 25 ευρώ. Εάν ο αγοραστής παραλάβει ελαττωματικούς μικροεπεξεργαστές, τότε αυτός επιβάλλει στην εταιρεία πρόστιμο 50 ευρώ για κάθε έναν από αυτούς.

Ποιος θα πρέπει να είναι ο αριθμός των ελαττωματικών μικροεπεξεργαστών σε ένα κιβώτιο ώστε η εταιρεία να έχει τη δυνατότητα να επιλέξει είτε την επιλογή ΙΙ είτε την επιλογή ΙΙΙ;

Α. 200

Β. 230

Γ. 260

Δ. 280

ΛΥΣΗ

Έστω κ ο αριθμός των ελαττωματικών μικροεπεξεργαστών σε κάποιο κιβώτιο. Τότε,

Κόστος επιλογής Ι = 50κ

Κόστος επιλογής ΙΙ = 2 * 1.000 + 0,8κ * 25 + 0,2κ * 50 = 2.000 + 30κ

Κόστος επιλογής ΙΙΙ = 3 * 1.000 + 25κ =3.000 + 25κ

Εάν 50κ ≤ 2.000 + 30κ => κ ≤ 100 , τότε η επιλογή Ι είναι προτιμότερη από την επιλογή ΙΙ

Εάν 50κ > 3.000 + 25κ ≥ 2.000 + 30κ => 100 < κ ≤ 200 , τότε η επιλογή ΙΙ είναι προτιμότερη.

Εάν κ ≥ 200, τότε η επιλογή ΙΙΙ είναι προτιμότερη.

Με βάση τα παραπάνω θα πρέπει 3.000 + 25κ = 2.000 + 30κ => κ=200. Σωστή απάντηση η Α

4. Έστω S το σύνολο που περιλαμβάνει όλα τα ζεύγη (i, j) όπου 1 ≤ i < j ≤ n και n ≥ 4 . Οποιαδήποτε δύο ζεύγη του S καλούνται «φίλοι» αν έχουν ένα κοινό στοιχείο, διαφορετικά καλούνται «εχθροί». Έστω δύο ζεύγη του S που είναι «φίλοι». Πόσα άλλα ζεύγη του S είναι κοινοί φίλοι και των δύο αυτών ζευγών;

Α. n - 2

Β. 2n - 6

Γ. n - 3

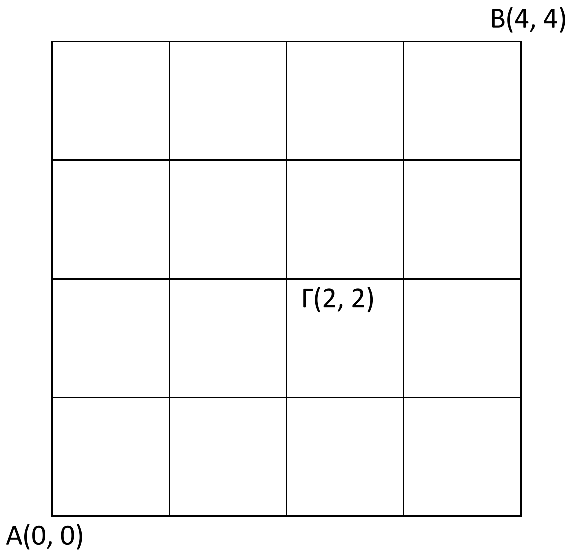
Δ. 2n - 7

ΛΥΣΗ

Λαμβάνοντας υπόψη οποιαδήποτε δύο μέλη του S, που είναι φίλοι, θα υπάρχει 1 αριθμός από τα ζευγάρια που θα είναι κοινά. Το κοινό στοιχείο αυτών των ζευγών θα έχει n – 3 ζεύγη, με τα υπόλοιπα n – 3 στοιχεία. Θα υπάρχει ένα ακόμη μέλος που θα αποτελείται από τα υπόλοιπα δύο στοιχεία που δεν είναι ίδια. Συνολικά υπάρχουν n – 3 + 1 = n – 2 άλλα μέλη του S που είναι κοινοί φίλοι των επιλεγμένων δύο ζευγών ή αριθμών.

Για παράδειγμα , έστω n = 6 και ας θεωρήσουμε τα ζεύγη (1, 2) και (1, 3) που είναι "φίλοι"
Οι "φίλοι" του ζεύγους (1, 2) στο σύνολο S είναι οι (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6).
"Φίλοι" του ζεύγους (1, 3) στο σύνολο S είναι τα ζεύγη (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6).
Ο αριθμός των στοιχείων του S που είναι κοινοί "φίλοι" είναι 4, δηλαδή τα ζεύγη (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3).
Άρα η απάντηση είναι n – 2. Σωστή απάντηση η Α.

5. Έστω ένα οδικό δίκτυο σε σχήμα ορθογώνιου πλέγματος πλευράς 4 km, όπως φαίνεται στο κατωτέρω σχήμα:



Ένα αυτοκίνητο πηγαίνει από το σημείο A(0, 0) στο σημείο B(4, 4), κινούμενο στους άξονες του δικτύου. Η κίνηση επιτρέπεται μόνο από αριστερά προς τα δεξιά και από κάτω προς τα πάνω. Η πιθανότητα το αυτοκίνητο να περάσει από το σημείο Γ(2, 2) είναι:

Α. 20%
Β. 45,71%
Γ. 50%
Δ. 51,43%

ΛΥΣΗ

Η μετακίνηση από το σημείο Α στο σημείο Β όπως και να γίνει θα αποτελείται από 8 βήματα από τα οποία τα 4 υποχρεωτικά είναι οριζόντια βήματα, Άρα το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών είναι
$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ =70

N(Ω = 70

Με την ίδια λογική, η μετακίνηση από το σημείο Α στο σημείο Γ όπως και να γίνει θα αποτελείται από 4 βήματα από τα οποία τα 2 υποχρεωτικά είναι οριζόντια, άρα το πλήθος των διαφορετικών διαδρομών είναι

$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{24}{4}$ =6

Ο άνθρωπος θα συνεχίσει από το Γ μέχρι το Β. Ομοίως, για τη μετακίνηση από το σημείο Γ στο σημείο Β που αποτελείται από 4 βήματα από τα οποία τα 2 υποχρεωτικά είναι οριζόντια, το πλήθος των διαδρομών είναι πάλι 6.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των διαδρομών από το Α στο Β που διέρχονται από το σημείο Γ θα είναι N(A) = $6 \cdot 6 = 36$

P(A) = $\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{36}{70} = \frac{18}{35} = 0{,}5143$ ή 51,43%.

6. Σύμφωνα με στοιχεία που προέρχονται από μία ανεξάρτητη Αρχή, η μέση τιμή ανά λίτρο της αμόλυβδης βενζίνης, σε ευρώ, από την 1η Σεπτεμβρίου 2023 έως την 1η Δεκεμβρίου 2023, δίνεται από τη συνάρτηση:

F(x) = 1,5 - 0,19(x-3), όπου F(x) είναι η μέση τιμή ανά λίτρο, x μήνες μετά την 1η Σεπτεμβρίου.

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τις πραγματικές τιμές της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο την 1η ημέρα των μηνών Σεπτέμβριος - Δεκέμβριος:

Μήνας	Πραγματική μέση τιμή αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο (€), την 1η του μήνα
Σεπτέμβριος	1,90
Οκτώβριος	1,75
Νοέμβριος	1,40
Δεκέμβριος	1,35

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

Ι. Η μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο την 1η Σεπτεμβρίου 2023, σύμφωνα με τα στοιχεία της ανεξάρτητης Αρχής, ήταν 1,50 ευρώ.

ΙΙ. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης της πραγματικής μέσης τιμής και της εκτιμώμενης μέσης τιμής της αμόλυβδης βενζίνης από την ανεξάρτητη Αρχή ανά λίτρο, κατά τη διάρκεια των τεσσάρων μηνών, υποδηλώνει μια πολύ ισχυρή γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

III. Με βάση το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή την πραγματική μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης και ανεξάρτητη μεταβλητή την εκτιμώμενη μέση τιμή της, η πραγματική μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο στις 15 Νοεμβρίου ήταν 1,39 ευρώ.

IV. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή την εκτιμώμενη μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης και ανεξάρτητη μεταβλητή την πραγματική μέση τιμή της προκύπτει ότι μέση πραγματική τιμή της αμόλυβδης βενζίνης 1,5 ευρώ ήταν στις 27 Οκτωβρίου.

Α. Η I και η II

Β. Η II και η III

Γ. Η II και η IV

Δ. Η I και η IV

ΛΥΣΗ

Ας εξετάσουμε αναλυτικά τις παραπάνω προτάσεις:

I. Δεδομένου ότι το 1,5 είναι σταθερός όρος, αντιπροσωπεύει μια πραγματική τιμή της τιμής της αμόλυβδης βενζίνης και όχι ένα μέτρο της μεταβολής της τιμής της. Για να προσδιορίσουμε ποια τιμή αντιπροσωπεύει, βρίσκουμε το x έτσι ώστε $F(x) = 1,5 \Rightarrow x = 3$. Επομένως, η εκτιμώμενη μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης είναι 1,5 Ευρώ ανά λίτρο 3 μήνες μετά την 1η Σεπτεμβρίου 2023, δηλαδή την 1η Δεκεμβρίου 2023. Η πρόταση είναι λάθος

II. Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

Μήνας	Χ	Πραγματική μέση τιμή βενζίνης Υ ανά λίτρο (€)	Εκτιμώμενη μέση τιμή βενζίνης F(X) ανά λίτρο (€)
Σεπτέμβριος	0	1,90	2,07
Οκτώβριος	1	1,75	1,88
Νοέμβριος	2	1,40	1,69
Δεκέμβριος	3	1,35	1,5
Σύνολο		6,40	7,14

Χρησιμοποιώντας και εφαρμόζοντας το τύπο γραμμικής συσχέτισης του Pearson βρίσκουμε ότι r = 0,976. Η τιμή αυτή υποδηλώνει μια πολύ ισχυρή γραμμική συσχέτιση. Η πρόταση είναι σωστή.

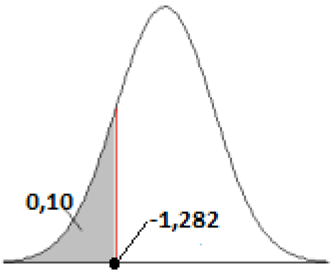
ΙΙΙ. Υπολογίζουμε την εξίσωση της γραμμικής παλινδρόμησης της Υ πάνω στην F(x). Κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς βρίσκουμε ότι : Y = -0,473 + 1,154F(x). Στις 15 Νοεμβρίου η τιμή της μεταβλητής Χ είναι 2,5. Συνεπώς , F(2,5) = 1,5 - 0,19(2,5 - 3) = 1,595. Άρα η εκτιμώμενη πραγματική τιμή της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο ήταν Y = -0,473 + 1,154(2,5) = 1,37 Ευρώ. Η πρόταση είναι λάθος.

IV. Υπολογίζουμε την εξίσωση της γραμμικής παλινδρόμησης της F(x) πάνω στην Y. Κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς βρίσκουμε ότι : F(x) = -0,477 + 0,826Y. Εάν Y = 1,5 τότε F(X) = -0,477 + 0,826(1,5) = 1,716. Άρα,

1,716 = 1,5 - 0,19(X - 3) => X = 1,863. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί περίπου στις 27 Οκτωβρίου και η πρόταση είναι σωστή.

Συνεπώς , σωστή απάντηση η Γ.

7. Οι βαθμολογίες των μαθητών μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 70 και διακύμανση 25. Μεταξύ ποιων τιμών, συμμετρικών ως προς τη μέση τιμή, βρίσκεται το 80% των παρατηρήσεων της κατανομής, εάν ισχύει το παρακάτω διάγραμμα για τις τυποποιημένες παρατηρήσεις της παραπάνω κατανομής;



Α. 62,58 και 77,42

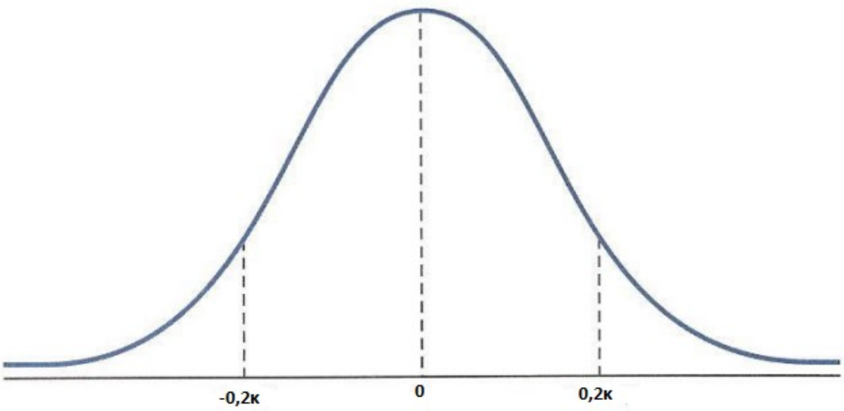
Β. 63,59 και 76,41

Γ. 61,88 και 78,12

Δ. 64,37 και 75,63

ΛΥΣΗ

Έστω ένα σημείο κ από το -∞ έως το +∞ των τιμών της κανονικής κατανομής. Θα πρέπει επομένως να ισχύει για την τιμή του κ ότι : P [|X - 70| ≤ κ] = 0,80 => P [-κ ≤ X - 70 ≤ κ] = 0,80 => P [70 - κ ≤ X ≤ 70 + κ] = 0,80 . Τυποποιούμε τώρα τις βαθμολογίες. Δεδομένου ότι οι αρχικές βαθμολογίες ακολουθούν κανονική κατανομή και οι τυποποιημένες θα ακολουθούν επίσης κανονική κατανομή. Άρα, P [((70 - κ) - 70)/5 ≤ (X - μ)/σ ≤ ((70 + κ) - 70)/5] = 0,80 => P [- κ/5 ≤ Z ≤ κ/5] = 0,80 => P [-0,2κ ≤ Z ≤ 0,2κ] = 0,8. Ας παρατηρήσουμε τώρα το παρακάτω σχήμα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής



Παρατηρούμε ότι για να βρούμε το εμβαδόν από -0,2κ έως 0,2κ στην ουσία αφαιρούμε το εμβαδόν από -∞ έως -0,2κ από το εμβαδόν από -∞ έως 0,2κ . Αλλά λόγω συμμετρικότητας το εμβαδόν από -∞ έως -0,2κ είναι ίσον με το εμβαδόν 1- (εμβαδόν από -∞ έως 0,2κ). Άρα, P [Z ≤ 0,2κ] - (1 - P [Z ≤ 0,2κ]) = 0,80 => 2 P [Z ≤ 0,2κ] = 1,80 => P [Z ≤ 0,2κ] = 0,90.

Εάν παρατηρήσουμε το σχήμα από τα δεδομένα της άσκησης λόγω συμμετρικότητας θα ισχύει ότι $0,2κ = 1,282 \Rightarrow κ = 6,41$

Άρα το 80% των βαθμών των μαθητών θα είναι μεταξύ 70 - 6,41 = 63,59 και 70 + 6,41 = 76,41.

Σωστή απάντηση η Β.

8. 2.000 αυτόματοι τηλεφωνητές έχουν συνδεθεί στο τηλεφωνικό δίκτυο μιας μεγάλης πολυεθνικής εταιρείας για την εξυπηρέτηση των πελατών της. Οι αυτόματοι τηλεφωνητές εξυπηρετούν τους πελάτες στις εξής κατηγορίες: Λογαριασμοί και Πληρωμές (Α), Συμβόλαια και Υπηρεσίες (Β), Τεχνική Υποστήριξη (Γ) και Υπηρεσίες Γενικής Πληροφόρησης (Δ). Οι αυτόματοι τηλεφωνητές των κατηγοριών Α, Β και Γ μπορούν να εξυπηρετούν πολλαπλούς σκοπούς. Ωστόσο, ένας αυτόματος τηλεφωνητής που εξυπηρετεί πελάτες των κατηγοριών είτε Α, είτε Β, είτε Γ, δεν μπορεί να εξυπηρετεί πελάτες της κατηγορίας Δ.

Στον απολογισμό που έγινε στο τέλος του έτους προέκυψαν τα ακόλουθα δεδομένα:

1. Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τους πελάτες της κατηγορίας Δ ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τόσο πελάτες της κατηγορίας Β όσο και πελάτες της κατηγορίας Γ, αλλά όχι πελάτες της κατηγορίας Α.

2. Το σύνολο των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν πελάτες και των 3 κατηγοριών Α, Β, και Γ ήταν 100.

3. Οι αριθμοί των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τις κατηγορίες των πελατών Α, Β, και Γ, όχι αποκλειστικά, ήταν σε αναλογία 2:1:1.

4. Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Β ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Γ. Αυτός ο αριθμός ήταν το 30% του αριθμού των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Α.

Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η πιθανότητα ένας τυχαίος πελάτης να εξυπηρετήθηκε από έναν αυτόματο τηλεφωνητή της κατηγορίας Συμβολαίων και Υπηρεσιών (Β);

Α. 25,25%

Β. 32,75%

Γ. 38,75%

Δ. 46,25%

ΛΥΣΗ

Δεδομένο 1 : Ένας αυτόματος τηλεφωνητής που εξυπηρετεί πελάτες των κατηγοριών είτε Α, είτε Β, είτε Γ δεν μπορεί να εξυπηρετεί πελάτες της κατηγορίας Δ.

Δεδομένο 2 : Οι αριθμοί των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τις κατηγορίες των πελατών Α, Β, και Γ (όχι αποκλειστικά) ήταν σε αναλογία 2:1:1. Έστω 2Κ, Κ, Κ οι αριθμοί των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τις κατηγορίες Α, Β και Γ, αντίστοιχα.

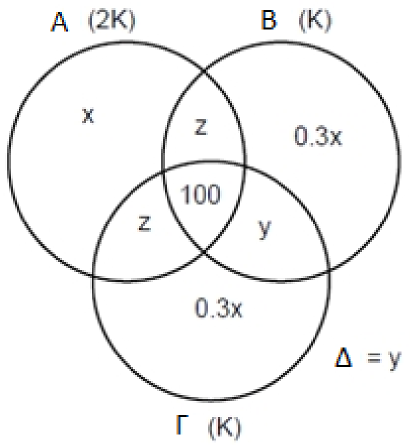
Δεδομένο 3 : Έστω x ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Α.

Δεδομένο 4 : Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Β ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Γ. Ο εν λόγω αριθμός είναι 0,3x.

Δεδομένο 5 : . Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τους πελάτες της κατηγορίας Δ ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τόσο πελάτες της κατηγορίας Β όσο και πελάτες της κατηγορίας Γ, αλλά όχι πελάτες της κατηγορίας Α. Έστω ότι αυτός ο αριθμός ήταν y.

Δεδομένο 6: Το σύνολο των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν πελάτες και των 3 κατηγοριών Α, Β, και Γ ήταν 100.

Συνεπώς έχουμε το παρακάτω διάγραμμα Venn :



Με βάση το ανωτέρω διάγραμμα έχουμε τα ακόλουθες σχέσεις:

$x + z + 0,3x + z + 100 + y + 0,3x + y = 2.000$

$1,6x + 2y + 2z = 1.900$ (1)

Επίσης $K = 0,3x + z + y + 100$

Οι αυτόματοι τηλεφωνητές που εξυπηρετούν τους πελάτες της κατηγορίας Α $= 2K = x + 2z + 100$

$\Rightarrow 2(0,3x + z + y + 100) = x + 2z + 100 \Rightarrow 0,4x = 2y + 100 \Rightarrow x = 5y + 250$ (2)

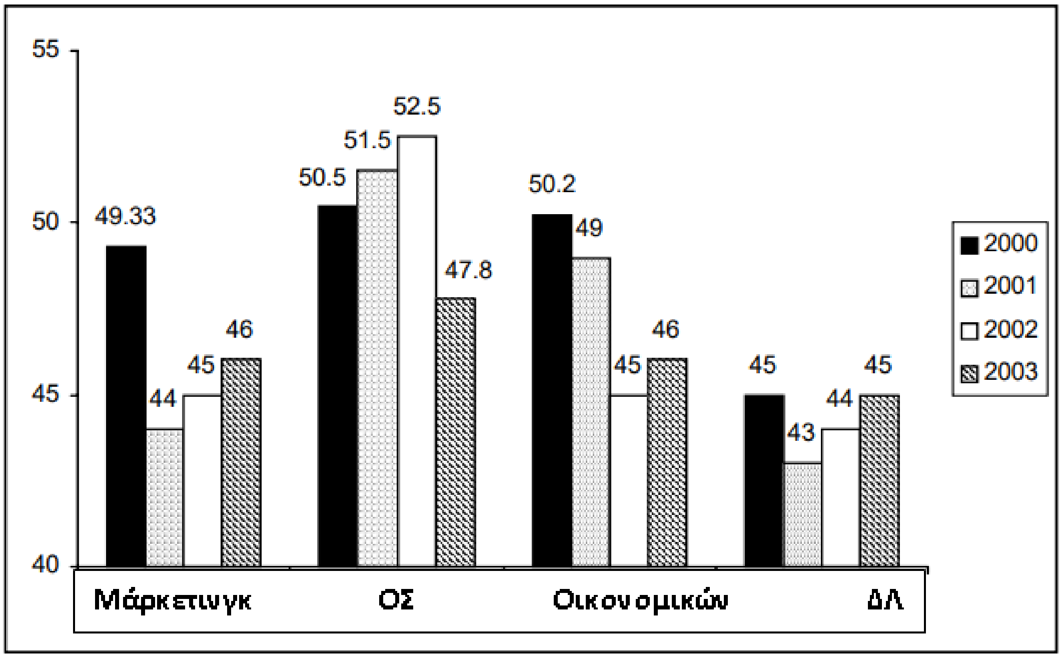
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

1,6 (5y + 250) + 2y + 2z = 1.900 => 10y + 2z = 1.500 => z = 750 – 5y (3)

Ισχύει ότι : αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρετούν τους πελάτες της κατηγορίας Β = z + 0,3x + 100 + y = (550 – 5y) + 0,3(5y + 250) + 100 + y = 925 – 2,5y.

Άρα ο μέγιστος αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρετούν τους πελάτες της κατηγορίας Β είναι 925 όταν y = 0, και η μέγιστη δυνατή τιμή της ζητούμενης πιθανότητας είναι 925/2.000 = 0,4625 δηλ. 46,25%. Σωστή απάντηση η Δ.

9. Ένα ιδιωτικό ΙΕΚ ιδρύθηκε την 1η Ιανουαρίου 2000 με 3, 4, 5 και 6 καθηγητές στα Τμήματα Μάρκετινγκ, Οργανωτικής Συμπεριφοράς (ΟΣ), Οικονομικών, και Διοίκησης Λειτουργιών (ΔΛ), αντίστοιχα. Κανένας νέος καθηγητής δεν συνταξιοδοτήθηκε ή εντάχθηκε στο ιδιωτικό ΙΕΚ κατά τους πρώτους τρεις μήνες του έτους 2000. Μέσα στα επόμενα τέσσερα χρόνια, το ιδιωτικό ΙΕΚ προσέλαβε έναν καθηγητή σε κάθε ένα από τα ανωτέρω τέσσερα Τμήματα. Όλοι οι νέοι καθηγητές ήταν 25 ετών τη στιγμή της ένταξής τους στο ιδιωτικό ΙΕΚ και όλοι τους εντάχθηκαν την 1η Απριλίου. Κατά τη διάρκεια αυτών των τεσσάρων ετών, ένας καθηγητής συνταξιοδοτήθηκε σε ηλικία 60 ετών. Δύο καθηγητές στο Τμήμα Μάρκετινγκ που εργάζονται στο ιδιωτικό ΙΕΚ από την ίδρυσή του έχουν γενέθλια στις 20 Νοεμβρίου. Ο ένας γεννήθηκε το 1947 και ο άλλος το 1950. Στο παρακάτω διάγραμμα εμφανίζεται η μέση ηλικία (από άποψη αριθμού συμπληρωμένων ετών) των καθηγητών την 1η Απριλίου των ετών 2000, 2001, 2002 και 2003.



Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ;

I. Ο καθηγητής που συνταξιοδοτήθηκε ήταν μέλος του Τμήματος Μάρκετινγκ.

II. Την 1η Απριλίου 2005, ο τρίτος καθηγητής που εργάζεται στο Τμήμα Μάρκετινγκ από την ί-δρυση του ΙΕΚ ήταν 52 ετών.

III. Ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα Οικονομικών το 2002.

IV. Ο νέος καθηγητής που εντάχθηκε στο Τμήμα Διοίκησης Λειτουργιών ήταν 29 ετών την 1η Απριλίου 2003.

Α. Η Ι και η ΙΙ

Β. Η ΙΙ και η ΙV

Γ. Η ΙΙ και η ΙΙΙ

Δ. Η Ι και η ΙΙΙ

ΛΥΣΗ

Σε οποιοδήποτε Τμήμα σε κάθε δεδομένο έτος, ο μέσος όρος της ηλικίας κυμαίνεται μεταξύ 42-53 έτη. Επίσης,

Α. Όταν ένας 25χρονος εντάσσεται στο Τμήμα, η μέση ηλικία πέφτει κατά τουλάχιστον 5 έτη.

Β. Όταν ένας 60χρονος συνταξιοδοτείται η πτώση είναι μικρότερη συγκρινόμενη με την περίπτωση Α.

Ας εξετάσουμε τώρα τις παραπάνω προτάσεις:

Ι. Στο ραβδόγραμμα μία πτώση αντιστοιχεί στον νέο 25χρονο που εντάχθηκε στον Τμήμα. Ωστόσο, δύο πτώσεις αντιστοιχούν στην ένταξη του νέου 25χρονου και την συνταξιοδότηση του 60χρονου. Αυτό το χαρακτηριστικό παρατηρείται μόνο στο Τμήμα Οικονομικών. Άρα η πρόταση είναι Λάθος.

ΙΙ. Από το ραβδόγραμμα προκύπτει ότι ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα Μάρκετινγκ το 2001. Την 1η Απριλίου 2000, η συμπληρωμένη ηλικία των δύο καθηγητών του Τμήματος ήταν 52 ετών και 49 ετών, χωρίς ιδιαίτερη σειρά. Η ηλικία του τρίτου καθηγητή του Τμήματος την 1η Απριλίου 2000 ήταν 49,33 × 3 – (52 + 49) = 47 έτη. Ως εκ τούτου, ο καθηγητής την 1η Απριλίου 2005 ήταν 52 ετών. Η πρόταση είναι Σωστή.

ΙΙΙ. Δεδομένου ότι η πτώση θα είναι μικρότερη σε περίπτωση που ένας καθηγητής συνταξιοδοτηθεί σε σύγκριση με αυτή που ένας νέος ενταχθεί στη σχολή, είναι από το ραβδόγραμμα φανερό ότι ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα Οικονομικών το 2002. Η πρόταση είναι Σωστή.

ΙV. Για το Τμήμα Διοίκησης Λειτουργιών, η μόνη πτώση στο ραβδόγραμμα φαίνεται το έτος 2001. Έτσι, ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα το 2001. Ως εκ τούτου, την 1η Απριλίου 2003 ήταν 27 ετών. Η πρόταση είναι Λάθος.

Επομένως σωστή απάντηση η Γ.

10. Μια πολύ γνωστή αλυσίδα αθλητικών ειδών διαθέτει ένα είδος παπουτσιών ορειβασίας σε τρία χρώματα : Άσπρο, Μαύρο και Καφέ. Οι αγοραστές του συγκεκριμένου είδους παπουτσιών κατατάσσονται σύμφωνα με την εταιρεία σε τρεις ηλικιακές ομάδες, τους Νέους, τους Μεσήλικες και τους Ηλικιωμένους. Τα ακόλουθα δεδομένα είναι γνωστά για τους αγοραστές του προηγούμενου Σαββατοκύριακου:

1. Συνολικά αγοράστηκαν 140 ζευγάρια παπούτσια και κανένας αγοραστής δεν αγόρασε περισσότερα από ένα ζευγάρια.

2. Ο αριθμός των Μεσήλικων αγοραστών ήταν διπλάσιος από τον αριθμό των Ηλικιωμένων αγοραστών, ενώ ο αριθμός των Νέων σε ηλικία αγοραστών ήταν διπλάσιος από τον αριθμό των Μεσήλικων αγοραστών.

3. Οι Νέοι σε ηλικία αγοραστές αγόρασαν 38 από τα 55 ζευγάρια παπουτσιών καφέ χρώματος που αγοράστηκαν συνολικά, και επίσης αγόρασαν τα μισά από τα ζευγάρια παπουτσιών άσπρου χρώματος που αγοράστηκαν συνολικά.

4. Οι Ηλικιωμένοι αγόρασαν ίσο αριθμό ζευγαριών παπουτσιών μαύρου χρώματος και καφέ χρώματος.

Εάν οι Νέοι σε ηλικία αγοραστές αγόρασαν ένα ζευγάρι μαύρων παπουτσιών λιγότερο από τα ζευγάρια μαύρων παπουτσιών που αγόρασαν οι Ηλικιωμένοι, τότε η πιθανότητα ένας Μεσήλικας να αγόρασε μαύρα παπούτσια είναι:

Α. 0%

Β. 20%

Γ. 40%

Δ. 50%

ΛΥΣΗ

Αριθμός Νέων σε ηλικία αγοραστών = 2 x αριθμός των Μεσηλίκων.

Αριθμός των Μεσηλίκων = 2 x αριθμός των Ηλικιωμένων

Συνολικός αριθμός ζευγαριών παπουτσιών που αγοράσθηκαν= 140

Συνεπώς, έχουμε μια αναλογία 4:2:1. Άρα αγοράσθηκαν : (4/7).140 = 80 ζευγάρια παπούτσια από τους Νέους σε ηλικία, (2/7).140 = 40 ζευγάρια παπούτσια από τους Μεσήλικες και (1/7).140 = 20 ζευγάρια παπούτσια από τους Ηλικιωμένους.

Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Ηλικιωμένοι	Μεσήλικες	Νέοι	Σύνολο
Άσπρο			43 - κ	
Μαύρο	κ	x	κ - 1	
Καφέ	κ	y	38	55
Σύνολο	20	40	80	140

Έστω κ : ο αριθμός των ηλικιωμένων που αγόρασαν μαύρα παπούτσια.

Ο αριθμός των Νέων που αγόρασαν μαύρα παπούτσια ήταν κ – 1.

Τότε οι Νέοι που αγόρασαν άσπρα παπούτσια ήταν = 80 – (38 + κ – 1) = 43 – κ

Ως εκ τούτου, οι Ηλικιωμένοι που αγόρασαν άσπρα παπούτσια + Μεσήλικες που αγόρασαν άσπρα παπούτσια = 43 – κ. Επίσης, το σύνολο των ηλικιωμένων + Μεσήλικες. = 60

Άρα:

(Ηλικιωμένοι που αγόρασαν άσπρα + Μεσήλικες που αγόρασαν άσπρα) + (Ηλικιωμένοι που αγόρασαν μαύρα + Μεσήλικες που αγόρασαν μαύρα) + (Ηλικιωμένοι που αγόρασαν καφέ + Μεσήλικες που αγόρασαν καφέ) = 60 => (43 – k) + (k + x) + (k + y) = 60.

Αλλά, κ + y + 38 = 55 => k + y = 17.

Συνεπώς, 43 – k + k + x +17 = 60 => x = 0. Άρα p = 0. Σωστή απάντηση η A.

<u>Εκδοχή 2</u>

1. Ένα κιβώτιο περιέχει 16 λαμπτήρες, από τους οποίους οι 2 είναι καμένοι. Παίρνουμε έναν-έναν στην τύχη τους λαμπτήρες και τους δοκιμάζουμε αν είναι καμένοι. Πόσους λαμπτήρες το λιγότερο πρέπει να βγάλουμε από το κιβώτιο, ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 55% να έχουμε πάρει τους καμένους;

Α. 10
Β. 12
Γ. 14
Δ. 16

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω ότι πρέπει να βγάλουμε το λιγότερο ν λαμπτήρες.

Οι δυνατές περιπτώσεις είναι N(Ω) = $\binom{16}{\nu}$

Ευνοϊκή περίπτωση είναι όταν μέσα στους ν λαμπτήρες που βγάλαμε υπάρχουν 2 καμένοι.

Οι 2 καμένοι μπορούν να επιλεγούν με $\binom{2}{2} = 1$ τρόπο και οι υπόλοιποι $\nu - 2$ με $\binom{14}{\nu-2}$ τρόπους.

Επομένως, οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι N(A) = $\binom{2}{2} \cdot \binom{14}{\nu-2} = 1 \cdot \binom{14}{\nu-2} = \binom{14}{\nu-2}$

Πρέπει $P(A) \geq \frac{55}{100} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} \geq \frac{55}{100} \Leftrightarrow$

$\frac{\binom{14}{\nu-2}}{\binom{16}{\nu}} \geq \frac{55}{100} \Leftrightarrow \frac{\frac{14!}{(\nu-2)!(16-\nu)!}}{\frac{16!}{\nu!(16-\nu)!}} \geq \frac{55}{100} \Leftrightarrow \frac{14!\cdot\nu!}{16!\cdot(\nu-2)!} \geq \frac{55}{100} \Leftrightarrow$

$\frac{14!\cdot(\nu-2)!\cdot(\nu-1)\cdot\nu}{14!\cdot 15\cdot 16\cdot(\nu-2)!} \geq \frac{55}{100} \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu-1)}{240} \geq \frac{55}{100} \Leftrightarrow \nu^2 - \nu - 132 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\nu \leq -11$, απορρίπτεται ή $\nu \geq 12$

2. Μια αεροπορική εταιρεία χρεώνει με πρόστιμο τους επιβάτες, όταν το βάρος των αποσκευών τους ανά επιβάτη, σε κιλά, είναι μεγαλύτερο από ένα συγκεκριμένο όριο. Σε μία πτήση, ένα ζευγάρι που οι αποσκευές του είχαν βάρος 50 κιλά πλήρωσε πρόστιμο 4 ευρώ, ενώ ένας άλλος επιβάτης που οι αποσκευές του είχαν βάρος 50 κιλά πλήρωσε πρόστιμο 12 ευρώ. Σε μία άλλη πτήση της ίδιας εταιρείας με 300 επιβάτες, η κατανομή του βάρους των αποσκευών των επιβατών παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Βάρος	[0, 5)	[5, 10)	[10, 15)	[15, 20)	[20, 25)	[25, 30)	Σύνολο
Αριθμ. Επιβ.	15	45	60	90	60	30	300

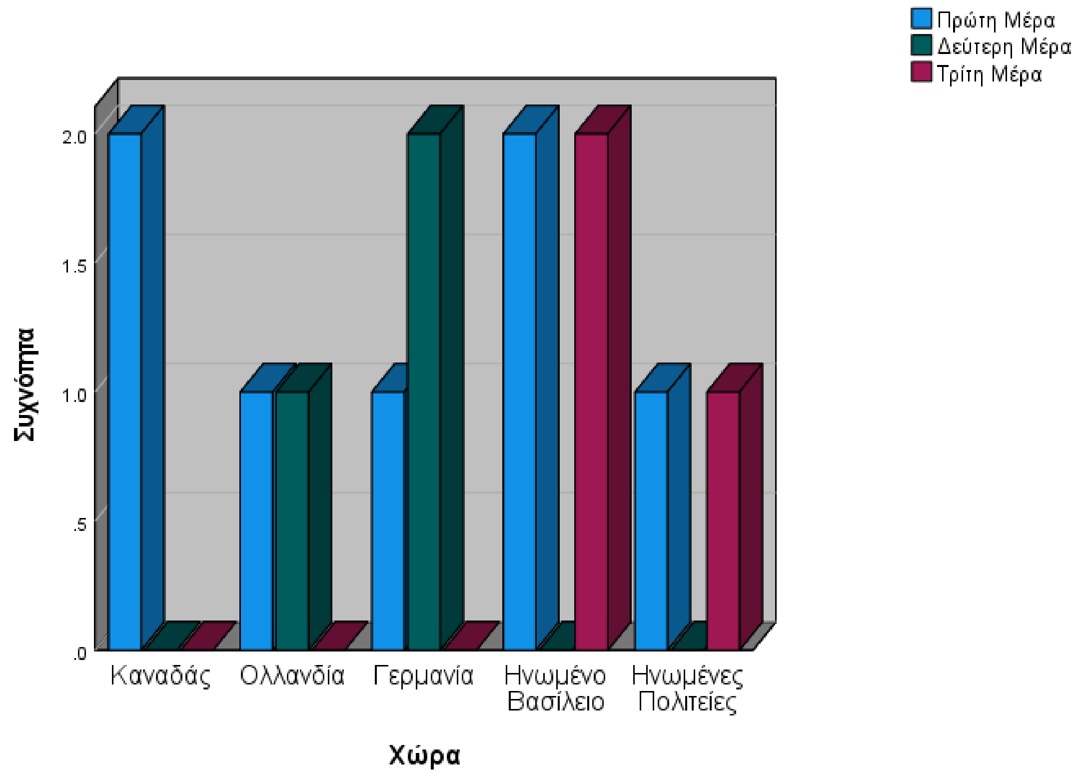
Επιλέγοντας στην τύχη έναν επιβάτη από τους παραπάνω, η πιθανότητα να πληρώσει πρόστιμο είναι:

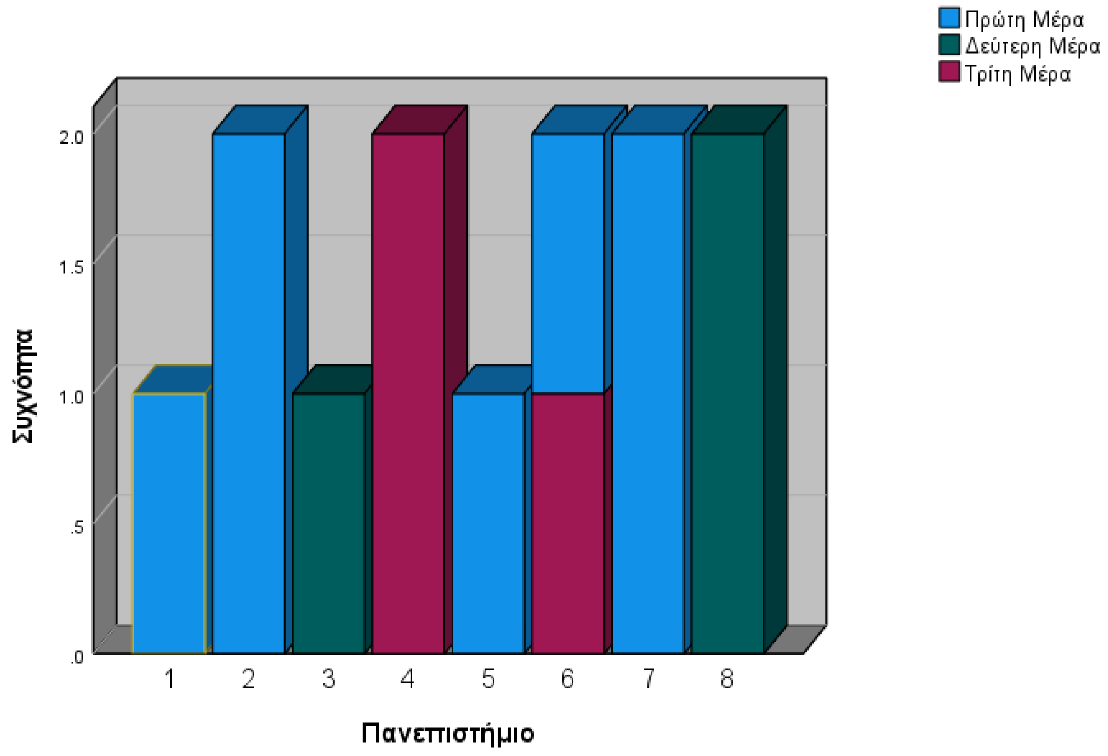
Α. 5%
Β. 15%
Γ. 20%
Δ. 30%

ΛΥΣΗ

Υποθέτουμε ότι το όριο του βάρους των αποσκευών ανά επιβάτη ώστε να μην χρεωθεί πρόστιμο είναι x κιλά και η χρέωση για κάθε κιλό παραπάνω είναι y ευρώ ανά κιλό.
Τα επιπλέον κιλά του ζευγαριού για τα οποία χρεώθηκε ήταν $50 - 2x$. Ισχύει
$(50 - 2x)y = 4$ (1)
Τα επιπλέον κιλά του άλλου επιβάτη για τα οποία χρεώθηκε ήταν $50 - x$. Ισχύει
$(50 - x)y = 12$ (2)
Διαιρούμε κατά μέλη και παίρνουμε
$\frac{(50-x)y}{(50-2x)y} = \frac{12}{4} \Leftrightarrow \frac{50-x}{50-2x} = 3 \Leftrightarrow 50 - x = 150 - 6x \Leftrightarrow x = 20$
Επομένως, το όριο βάρους των αποσκευών ανά επιβάτη ώστε να μην χρεωθεί πρόστιμο είναι 20 κιλά.
Από τον πίνακα κατανομής του βάρους των αποσκευών παρατηρούμε ότι 90 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος που υπερβαίνει τα 20 κιλά.
P(A) = $\frac{90}{300} = 0{,}3$ ή 30%.

3. Ένας καθηγητής Μαθηματικών παρακολουθεί τον αριθμό των επισκεπτών στην ιστοσελίδα που διαθέτει στο Πανεπιστήμιό του. Ο πάροχος υπηρεσιών ίντερνετ του έχει δώσει τα ακόλουθα διαγράμματα για τις τρεις προηγούμενες ημέρες σχετικά με τη χώρα προέλευσης των επισκεπτών και το Πανεπιστήμιο στο οποίο αυτοί ανήκουν:





Επισκέπτες από πόσα πανεπιστήμια του Ηνωμένου Βασιλείου επισκέφτηκαν την ιστοσελίδα του καθηγητή τις τρεις αυτές ημέρες;

Α. 0

Β. 1

Γ. 2

Δ. 3

ΛΥΣΗ

Από το πρώτο διάγραμμα των χωρών σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

	1η ημέρα	**2η ημέρα**	**3η ημέρα**
Καναδάς	2	0	0
Ολλανδία	1	1	0
Γερμανία	1	2	0
Ηνωμένο Βασίλειο	2	0	2
Ηνωμένες Πολιτείες	1	0	1

Από το δεύτερο διάγραμμα των πανεπιστημίων σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

	1η ημέρα	**2η ημέρα**	**3η ημέρα**
1	1	0	0
2	2	0	0
3	0	1	0
4	0	0	2
5	1	0	0
6	1	0	1
7	2	0	0
8	0	2	0

Την 3η ημέρα, υπήρχαν 2 επισκέπτες από το Ηνωμένο Βασίλειο και 1 από τις ΗΠΑ. Την ίδια μέρα, τον ιστοσελίδα επισκέφτηκαν 2 άτομα από το Πανεπιστήμιο 4 και 1 από το Πανεπιστήμιο 6. Έτσι το Πανεπιστήμιο 4 βρίσκεται στο Ηνωμένο Βασίλειο και το Πανεπιστήμιο 6 στις ΗΠΑ. Παρόμοιος συλλογισμός για την ημέρα 2 μας δίνει το συμπέρασμα ότι το Πανεπιστήμιο 3 βρίσκεται στην Ολλανδία και το Πανεπιστήμιο 8 στην Γερμανία. Την 1η ημέρα, ο αριθμός των επισκεπτών από τις ΗΠΑ είναι 1 και αυτός από το Πανεπιστήμιο 6 είναι 1. Το Πανεπιστήμιο 6 βρίσκεται στις ΗΠΑ (που προέκυψε παραπάνω), πράγμα που σημαίνει ότι κανένα άλλο πανεπιστήμιο δεν βρίσκεται στις ΗΠΑ. Ο αριθμός των επισκεπτών από την Γερμανία την 1η ημέρα είναι 1. Επίσης, κανένας επισκέπτης από το Πανεπιστήμιο 8, το οποίο βρίσκεται στην Γερμανία, δεν έχει επισκεφτεί την ιστοσελίδα την 1η ημέρα. Αυτό σημαίνει ότι ένα από τα Πανεπιστήμια 1 η το Πανεπιστήμιο 5 είναι στην Γερμανία και το άλλο στην Ολλανδία . Μια παρόμοια λογική μας δίνει ότι το ένα από το Πανεπιστήμιο 2 και το Πανεπιστήμιο 6 βρίσκεται στο Ηνωμένο Βασίλειο και το άλλο στον Καναδά. Με βάση την παραπάνω ανάλυση καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα Πανεπιστήμια του Ηνωμένου Βασιλείου ήταν 2. Σωστή απάντηση η Γ.

4. Θεωρούμε την ακολουθία αριθμών $α_1$, $α_2$, $α_3$, …… .

Εάν $α_1 = 81,33$, $α_2 = -19$ και $α_i = α_{i-1} – α_{i-2}$ για $i≥3$, τότε η μέση τιμή των 6002 πρώτων όρων της ακολουθίας είναι:

Α. 0,0104

Β. -0,0167

Γ. -0.050

Δ. 0,0199

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι : $α_1 = 81,33$, $α_2 = -19$. Για $i≥3$ θα έχουμε ότι:

$α_3 = α_2 - α_1 = -19 – 81,33 = -100,33$

$α_4 = α_3 – α_2 = -100,33 + 19 = - 81,33$

$α_5 = α_4 – α_3 = -81,33 + 100,33 = 19$

$α_6 = α_5 – α_4 = 19 + 81,33 = 100,33$

$α_7 = α_6 – α_5 = 100,33 – 19 = 81,33$

$α_8 = α_7 – α_6 = 81,33 – 100,33 = -19$

Εάν συνεχίσουμε να βρίσκουμε όρους της ακολουθίας, θα παρατηρήσουμε ότι υπάρχει ένα συγκεκριμένο μοτίβο έξι όρων που έχουν άθροισμα 0. Άρα, τελικά το ζητούμενο άθροισμα θα είναι τελικά το $α_1 + α_2 = 81,33 – 19 = 62,33$. Συνεπώς, η ζητούμενη μέση τιμή θα είναι : 62,33/6002 = 0,0104. Σωστή απάντηση η Α.

5. Τα 5 μέλη μιας ομάδας χωρίζονται σε 5 υποομάδες των 4 ατόμων. Αν το άθροισμα των ηλικιών των ατόμων της 1ης υποομάδας είναι 132, ο μέσος όρος των αθροισμάτων των ηλικιών των ατόμων της 1ης και 2ης υποομάδας είναι 135, ο μέσος όρος των αθροισμάτων των ηλικιών των ατόμων της 1ης, 2ης και 3ης υποομάδας είναι 128, ο μέσος όρος των αθροισμάτων των ηλικιών των ατόμων της 1ης, 2ης 3ης και 4ης υποομάδας είναι 130 και ο μέσος όρος των αθροισμάτων των ηλικιών των ατόμων και των 5 υποομάδων είναι 128, η διάμεσος των ηλικιών των μελών της ομάδας είναι:

Α. 22

Β. 28
Γ. 46
Δ. 50

ΛΥΣΗ

Υποθέτουμε ότι οι ηλικίες των 5 μελών της ομάδας είναι οι: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.
Οι 5 υποομάδες είναι οι:
$x_1, x_2, x_3, x_4,\quad x_1, x_2, x_3, x_5,\quad x_1, x_2, x_4, x_5,\quad x_1, x_3, x_4, x_5,\quad x_2, x_3, x_4, x_5$
Έστω S το άθροισμα των 5 ηλικιών $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, τότε το άθροισμα των ηλικιών της κάθε υποομάδας είναι
$S_1 = S - x_5$
$S_2 = S - x_4$
$S_3 = S - x_3$
$S_4 = S - x_2$
$S_5 = S - x_1$

Το άθροισμα των ηλικιών της 1ης υποομάδας είναι $S_1 = 132$, άρα
$S - x_5 = 132$ (1)
Ο μέσος όρος των ηλικιών της 1ης και 2ης υποομάδας είναι 135, επομένως το άθροισμα των ηλικιών της 1ης και 2ης υποομάδας είναι 270, άρα $S_2 = 270 - 132 = 138$, και
$S - x_4 = 138$ (2)
Ο μέσος όρος των ηλικιών της 1ης, 2ης και 3ης υποομάδας είναι 128, επομένως το άθροισμα των ηλικιών της 1ης, 2ης και 3ης υποομάδας είναι 384, άρα $S_3 = 384 - 270 = 114$, και
$S - x_3 = 114$ (3)
Ο μέσος όρος των ηλικιών της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης υποομάδας είναι 130, επομένως το άθροισμα των ηλικιών της 1ης, 2ης, 3ης και 4ης υποομάδας είναι 520, άρα $S_4 = 520 - 384 = 136$, και
$S - x_2 = 136$ (4)
Ο μέσος των ηλικιών και των 5 υποομάδων είναι 128, επομένως το άθροισμα των ηλικιών και των 5 υποομάδων είναι 640, άρα $S_5 = 640 - 520 = 120$, και
$S - x_1 = 120$ (5)
Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3), (4) και (5) και έχουμε
$5S - S = 132 + 138 + 114 + 136 + 120 \Leftrightarrow 4S = 640 \Leftrightarrow S = 160$
$x_5 = S - S_1 = 160 - 132 = 28$
$x_4 = S - S_2 = 160 - 138 = 22$
$x_3 = S - S_3 = 160 - 114 = 46$
$x_2 = S - S_4 = 160 - 136 = 24$
$x_1 = S - S_5 = 160 - 120 = 40$

Οι 5 ηλικίες σε αύξουσα σειρά είναι: 22, 24, 28, 40, 46.
Παρατηρούμε ότι η διάμεσος των ηλικιών είναι 28.

6. Σύμφωνα με στοιχεία που προέρχονται από μία ανεξάρτητη Αρχή, η μέση τιμή ανά λίτρο της αμόλυβδης βενζίνης, σε ευρώ, από την 1η Σεπτεμβρίου 2023 έως την 1η Δεκεμβρίου 2023, δίνεται από τη συνάρτηση:

F(x) = 1,5 - 0,19(x-3), όπου F(x) είναι η μέση τιμή ανά λίτρο x μήνες μετά την 1η Σεπτεμβρίου.

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τις πραγματικές μέσες τιμές της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο την 1η ημέρα των μηνών Σεπτέμβριος – Δεκέμβριος:

Μήνας	Πραγματική μέση τιμή αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο (€), την 1η του μήνα
Σεπτέμβριος	1,90
Οκτώβριος	1,75
Νοέμβριος	1,40
Δεκέμβριος	1,35

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

I. Η μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο την 1η Σεπτεμβρίου 2023, σύμφωνα με τα στοιχεία της ανεξάρτητης Αρχής, ήταν 1,50 ευρώ.

II. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης της πραγματικής μέσης τιμής και της εκτιμώμενης μέσης τιμής της αμόλυβδης βενζίνης από την ανεξάρτητη Αρχή ανά λίτρο, κατά τη διάρκεια των τεσσάρων μηνών, υποδηλώνει μια πολύ ισχυρή γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

III. Με βάση το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή την πραγματική μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης και ανεξάρτητη μεταβλητή την εκτιμώμενη μέση τιμή της, η πραγματική μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο στις 15 Νοεμβρίου ήταν 1,39 ευρώ.

IV. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή την εκτιμώμενη μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης και ανεξάρτητη μεταβλητή την πραγματική μέση τιμή της, προκύπτει ότι μέση πραγματική τιμή της αμόλυβδης βενζίνης 1,5 ευρώ ήταν στις 27 Οκτωβρίου.

Α. Η I και η II

Β. Η II και η III

Γ. Η II και η IV

Δ. Η I και η IV

ΛΥΣΗ

Ας εξετάσουμε αναλυτικά τις παραπάνω προτάσεις:

I. Δεδομένου ότι το 1,5 είναι σταθερός όρος, αντιπροσωπεύει μια πραγματική τιμή της τιμής της αμόλυβδης βενζίνης και όχι ένα μέτρο της μεταβολής της τιμής της. Για να προσδιορίσουμε ποια τιμή αντιπροσωπεύει, βρίσκουμε το x έτσι ώστε F(x) = 1,5 => x = 3. Επομένως, η εκτιμώμενη μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης είναι 1,5 Ευρώ ανά λίτρο 3 μήνες μετά την 1η Σεπτεμβρίου 2023, δηλαδή την 1η Δεκεμβρίου 2023. Η πρόταση είναι λάθος

II. Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

Μήνας	X	Πραγματική μέση τιμή βενζίνης Y ανά λίτρο (€)	Εκτιμώμενη μέση τιμή βενζίνης F(X) ανά λίτρο (€)
Σεπτέμβριος	0	1,90	2,07
Οκτώβριος	1	1,75	1,88
Νοέμβριος	2	1,40	1,69
Δεκέμβριος	3	1,35	1,5
Σύνολο		6,40	7,14

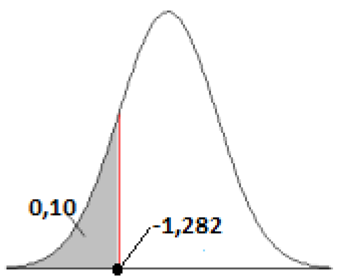
Χρησιμοποιώντας και εφαρμόζοντας το τύπο γραμμικής συσχέτισης του Pearson βρίσκουμε ότι r = 0,976. Η τιμή αυτή υποδηλώνει μια πολύ ισχυρή γραμμική συσχέτιση. Η πρόταση είναι σωστή.

III. Υπολογίζουμε την εξίσωση της γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στην F(x). Κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς βρίσκουμε ότι : Y = -0,473 + 1,154F(x). Στις 15 Νοεμβρίου η τιμή της μεταβλητής X είναι 2,5. Συνεπώς , F(2,5) = 1,5 - 0,19(2,5 - 3) = 1,595. Άρα η εκτιμώμενη πραγματική τιμή της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο ήταν Y = -0,473 + 1,154(2,5) = 1,37 Ευρώ. Η πρόταση είναι λάθος.

IV. Υπολογίζουμε την εξίσωση της γραμμικής παλινδρόμησης της F(x) πάνω στην Y. Κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς βρίσκουμε ότι : F(x) = -0,477 + 0,826Y. Εάν Y = 1,5 τότε F(X) = -0,477 + 0,826(1,5) = 1,716. Άρα, 1,716 = 1,5 - 0,19(X - 3) => X = 1,863. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί περίπου στις 27 Οκτωβρίου και η πρόταση είναι σωστή.

Συνεπώς , σωστή απάντηση η Γ.

7. Η βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 70 και διακύμανση 25. Μεταξύ ποιων τιμών, συμμετρικών ως προς τη μέση τιμή, βρίσκεται το 80% των παρατηρήσεων της κατανομής, εάν ισχύει το παρακάτω διάγραμμα για τις τυποποιημένες παρατηρήσεις της παραπάνω κατανομής;



Α. 62,58 και 77,42

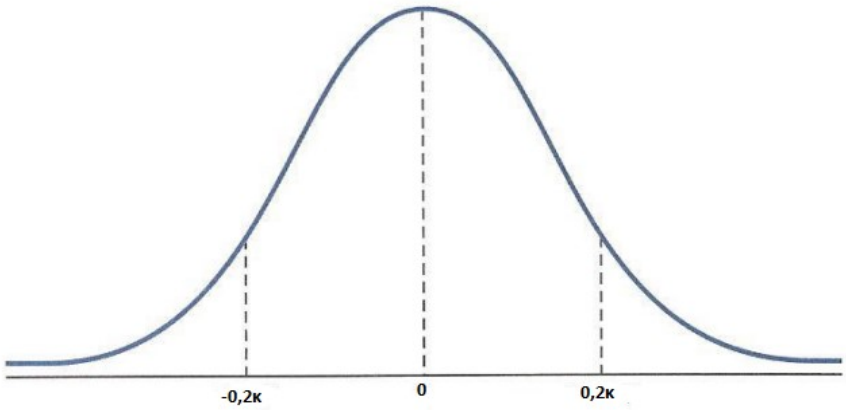
Β. 63,59 και 76,41

Γ. 61,88 και 78,12

Δ. 64,37 και 75,63

ΛΥΣΗ

Έστω ένα σημείο κ από το -∞ έως το +∞ των τιμών της κανονικής κατανομής. Θα πρέπει επομένως να ισχύει για την τιμή του κ ότι : P [|X - 70| ≤ κ] = 0,80 => P [-κ ≤ X - 70 ≤ κ] = 0,80 => P [70 - κ ≤ X ≤ 70 + κ] = 0,80 . Τυποποιούμε τώρα τις βαθμολογίες. Δεδομένου ότι οι αρχικές βαθμολογίες ακολουθούν κανονική κατανομή και οι τυποποιημένες θα ακολουθούν επίσης κανονική κατανομή. Άρα, P [((70 - κ) - 70)/5 ≤ (X - μ)/σ ≤ ((70 + κ) - 70)/5] = 0,80 => P [- κ/5 ≤ Z ≤ κ/5] = 0,80 => P [-0,2κ ≤ Z ≤ 0,2κ] = 0,8. Ας παρατηρήσουμε τώρα το παρακάτω σχήμα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής



Παρατηρούμε ότι για να βρούμε το εμβαδόν από -0,2κ έως 0,2κ στην ουσία αφαιρούμε το εμβαδόν από -∞ έως -0,2κ από το εμβαδόν από -∞ έως 0,2κ . Αλλά λόγω συμμετρικότητας το εμβαδόν από -∞ έως -0,2κ είναι ίσον με το εμβαδόν 1- (εμβαδόν από -∞ έως 0,2κ). Άρα, $P [Z \leq 0{,}2κ] - (1 - P [Z \leq 0{,}2κ]) = 0{,}80 \Rightarrow 2 P [Z \leq 0{,}2κ] = 1{,}80 \Rightarrow P [Z \leq 0{,}2κ] = 0{,}90$.

Εάν παρατηρήσουμε το σχήμα από τα δεδομένα της άσκησης λόγω συμμετρικότητας θα ισχύει ότι $0{,}2κ = 1{,}282 \Rightarrow κ = 6{,}41$

Άρα το 80% των βαθμών των μαθητών θα είναι μεταξύ 70 - 6,41 = 63,59 και 70 + 6,41 = 76,41.

Σωστή απάντηση η Β.

8. 2.000 αυτόματοι τηλεφωνητές έχουν συνδεθεί στο τηλεφωνικό δίκτυο μιας μεγάλης πολυεθνικής εταιρείας για την εξυπηρέτηση των πελατών της. Οι αυτόματοι τηλεφωνητές εξυπηρετούν τους πελάτες στις εξής κατηγορίες : Λογαριασμοί και Πληρωμές (Α), Συμβόλαια και Υπηρεσίες (Β), Τεχνική Υποστήριξη (Γ) και Υπηρεσίες Γενικής Πληροφόρησης (Δ). Οι αυτόματοι τηλεφωνητές των κατηγοριών Α, Β και Γ μπορούν να εξυπηρετούν πολλαπλούς σκοπούς. Ωστόσο, ένας αυτόματος τηλεφωνητής που εξυπηρετεί πελάτες των κατηγοριών είτε Α, είτε Β, είτε Γ δεν μπορεί να εξυπηρετεί πελάτες της κατηγορίας Δ.

Στον απολογισμό που έγινε στο τέλος του έτους προέκυψαν τα ακόλουθα δεδομένα:

1. Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τους πελάτες της κατηγορίας Δ ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τόσο πελάτες της κατηγορίας Β όσο και πελάτες της κατηγορίας Γ, αλλά όχι πελάτες της κατηγορίας Α.

2. Το σύνολο των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν πελάτες και των 3 κατηγοριών Α, Β, και Γ ήταν 100.

3. Οι αριθμοί των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τις κατηγορίες των πελατών Α, Β, και Γ, όχι αποκλειστικά, ήταν σε αναλογία 2:1:1.

4. Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Β ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που

εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Γ. Αυτός ο αριθμός ήταν το 30% του αριθμού των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Α.

Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η πιθανότητα ένας τυχαίος πελάτης να εξυπηρετήθηκε από έναν αυτόματο τηλεφωνητή της κατηγορίας Συμβολαίων και Υπηρεσιών (Β);

Α. 25,25%

Β. 32,75%

Γ. 38,75%

Δ. 46,25%

ΛΥΣΗ

Δεδομένο 1 : Ένας αυτόματος τηλεφωνητής που εξυπηρετεί πελάτες των κατηγοριών είτε Α, είτε Β, είτε Γ δεν μπορεί να εξυπηρετεί πελάτες της κατηγορίας Δ.

Δεδομένο 2 : Οι αριθμοί των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τις κατηγορίες των πελατών Α, Β, και Γ (όχι αποκλειστικά) ήταν σε αναλογία 2:1:1. Έστω 2Κ, Κ, Κ οι αριθμοί των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τις κατηγορίες Α, Β και Γ, αντίστοιχα.

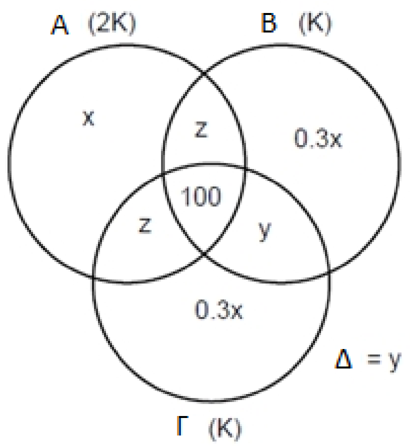
Δεδομένο 3 : Έστω x ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Α.

Δεδομένο 4 : Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Β ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Γ. Ο εν λόγω αριθμός είναι 0,3x.

Δεδομένο 5 : **.** Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τους πελάτες της κατηγορίας Δ ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τόσο πελάτες της κατηγορίας Β όσο και πελάτες της κατηγορίας Γ, αλλά όχι πελάτες της κατηγορίας Α. Έστω ότι αυτός ο αριθμός ήταν y.

Δεδομένο 6: Το σύνολο των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν πελάτες και των 3 κατηγοριών Α, Β, και Γ ήταν 100.

Συνεπώς έχουμε το παρακάτω διάγραμμα Venn :



Με βάση το ανωτέρω διάγραμμα έχουμε τα ακόλουθες σχέσεις:

x + z + 0,3x + z + 100 + y + 0,3x + y = 2.000

1,6x + 2y + 2z = 1.900 (1)

Επίσης K = 0,3x + z + y +100

Οι αυτόματοι τηλεφωνητές που εξυπηρετούν τους πελάτες της κατηγορίας Α = 2K = x + 2z + 100

=> 2(0,3x + z + y + 100) = x + 2z + 100 => 0,4x = 2y + 100 => x = 5y + 250 (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

1,6 (5y + 250) + 2y + 2z = 1.900 => 10y + 2z = 1.500 => z = 750 – 5y (3)

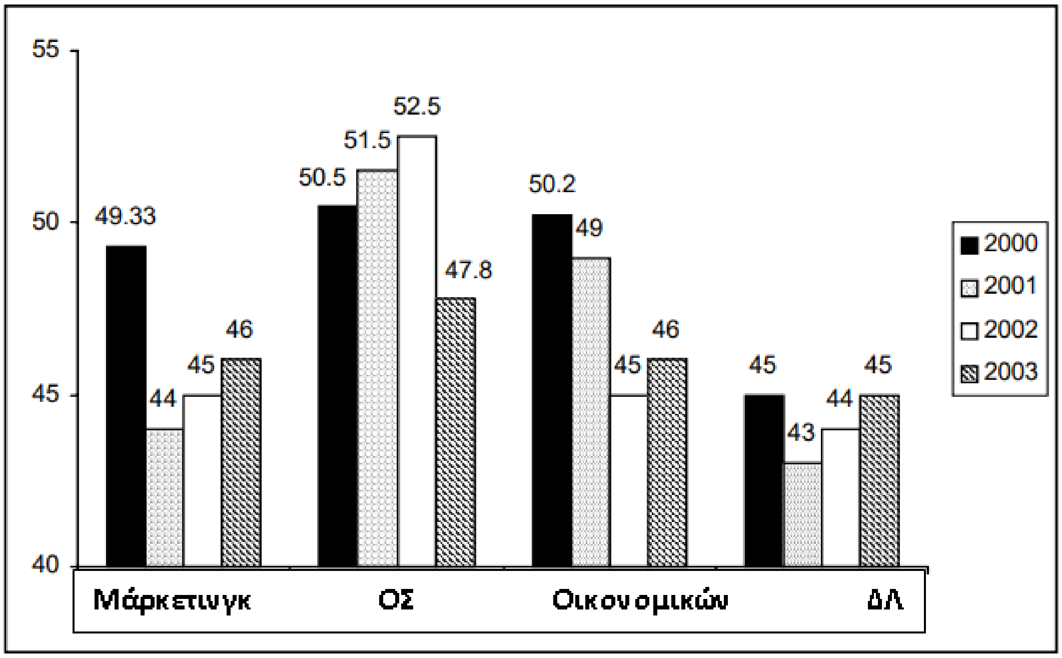
Ισχύει ότι : αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρετούν τους πελάτες της κατηγορίας Β = z + 0,3x + 100 + y = (550 – 5y) + 0,3(5y + 250) + 100 + y = 925 – 2,5y.

Άρα ο μέγιστος αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρετούν τους πελάτες της κατηγορίας Β είναι 925 όταν y = 0, και η μέγιστη δυνατή τιμή της ζητούμενης πιθανότητας είναι 925/2.000 = 0,4625 δηλ. 46,25%.

Σωστή απάντηση η Δ.

9. Ένα ιδιωτικό ΙΕΚ ιδρύθηκε την 1η Ιανουαρίου 2000 με 3, 4, 5 και 6 καθηγητές στα Τμήματα Μάρκετινγκ, Οργανωτικής Συμπεριφοράς (ΟΣ), Οικονομικών, και Διοίκησης Λειτουργιών (ΔΛ), αντίστοιχα. Κανένας νέος καθηγητής δεν συνταξιοδοτήθηκε ή εντάχθηκε στο ιδιωτικό ΙΕΚ κατά τους πρώτους τρεις μήνες του έτους 2000. Μέσα στα επόμενα τέσσερα χρόνια, το ιδιωτικό ΙΕΚ προσέλαβε έναν καθηγητή σε κάθε ένα από τα ανωτέρω τέσσερα Τμήματα. Όλοι οι νέοι καθηγητές ήταν 25 ετών τη στιγμή της ένταξής τους στο ιδιωτικό ΙΕΚ και όλοι τους εντάχθηκαν την 1η Απριλίου. Κατά τη διάρκεια αυτών των τεσσάρων ετών, ένας καθηγητής

συνταξιοδοτήθηκε σε ηλικία 60 ετών. Δύο καθηγητές στο Τμήμα Μάρκετινγκ που εργάζονται στο ιδιωτικό ΙΕΚ από την ίδρυσή του έχουν γενέθλια στις 20 Νοεμβρίου. Ο ένας γεννήθηκε το 1947 και ο άλλος το 1950. Στο παρακάτω ραβδόγραμμα εμφανίζεται η μέση ηλικία (από άποψη αριθμού συμπληρωμένων ετών) των καθηγητών την 1η Απριλίου των ετών 2000, 2001, 2002 και 2003.



Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ;

I. Ο καθηγητής που συνταξιοδοτήθηκε ήταν μέλος του Τμήματος Μάρκετινγκ.

II. Την 1η Απριλίου 2005, ο τρίτος καθηγητής που εργάζεται στο Τμήμα Μάρκετινγκ από την ίδρυση του ΙΕΚ ήταν 52 ετών.

III. Ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα Οικονομικών το 2002.

IV. Ο νέος καθηγητής, που εντάχθηκε στο Τμήμα Διοίκησης Λειτουργιών ήταν 29 ετών την 1η Απριλίου 2003.

Α. Η I και η II

Β. Η II και η IV

Γ. Η II και η III

Δ. Η I και η III

ΛΥΣΗ

Σε οποιοδήποτε Τμήμα σε κάθε δεδομένο έτος, ο μέσος όρος της ηλικίας κυμαίνεται μεταξύ 42-53 έτη. Επίσης,

Α. Όταν ένας 25χρονος εντάσσεται στο Τμήμα, η μέση ηλικία πέφτει κατά τουλάχιστον 5 έτη.

Β. Όταν ένας 60χρονος συνταξιοδοτείται η πτώση είναι μικρότερη συγκρινόμενη με την περίπτωση Α.

Ας εξετάσουμε τώρα τις παραπάνω προτάσεις:

Ι. Στο ραβδόγραμμα μία πτώση αντιστοιχεί στον νέο 25χρονο που εντάχθηκε στο Τμήμα. Ωστόσο, δύο πτώσεις αντιστοιχούν στην ένταξη του νέου 25χρονου και την συνταξιοδότηση του 60χρονου. Αυτό το χαρακτηριστικό παρατηρείται μόνο στο Τμήμα Οικονομικών. Άρα η πρόταση είναι Λάθος.

ΙΙ. Από το ραβδόγραμμα προκύπτει ότι ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα Μάρκετινγκ το 2001. Την 1η Απριλίου 2000, η συμπληρωμένη ηλικία των δύο καθηγητών του Τμήματος ήταν 52 ετών και 49 ετών, χωρίς ιδιαίτερη σειρά. Η ηλικία του τρίτου καθηγητή του Τμήματος την 1η Απριλίου 2000 ήταν 49,33 × 3 – (52 + 49) = 47 έτη. Ως εκ τούτου, ο καθηγητής την 1η Απριλίου 2005 ήταν 52 ετών. Η πρόταση είναι Σωστή.

ΙΙΙ. Δεδομένου ότι η πτώση θα είναι μικρότερη σε περίπτωση που ένας καθηγητής συνταξιοδοτηθεί σε σύγκριση με αυτή που ένας νέος ενταχθεί στη σχολή, είναι από το ραβδόγραμμα φανερό ότι ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα Οικονομικών το 2002. Η πρόταση είναι Σωστή.

IV. Για το Τμήμα Διοίκησης Λειτουργιών, η μόνη πτώση στο ραβδόγραμμα φαίνεται το έτος 2001. Έτσι, ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα το 2001. Ως εκ τούτου, την 1η Απριλίου 2003 ήταν 27 ετών. Η πρόταση είναι Λάθος.

Επομένως σωστή απάντηση η Γ.

10. Μια πολύ γνωστή αλυσίδα αθλητικών ειδών διαθέτει ένα είδος παπουτσιών ορειβασίας σε τρία χρώματα: Άσπρο, Μαύρο και Καφέ. Οι αγοραστές του συγκεκριμένου είδους παπουτσιών κατατάσσονται σύμφωνα με την εταιρεία σε τρεις ηλικιακές ομάδες, τους Νέους, τους Μεσήλικες και τους Ηλικιωμένους. Τα ακόλουθα δεδομένα είναι γνωστά για τους αγοραστές του προηγούμενου Σαββατοκύριακου:

1. Συνολικά αγοράστηκαν 140 ζευγάρια παπούτσια και κανένας αγοραστής δεν αγόρασε περισσότερα από ένα ζευγάρια.

2. Ο αριθμός των Μεσήλικων αγοραστών ήταν διπλάσιος από τον αριθμό των Ηλικιωμένων αγοραστών, ενώ ο αριθμός των Νέων σε ηλικία αγοραστών ήταν διπλάσιος από τον αριθμό των Μεσήλικων αγοραστών.

3. Οι Νέοι σε ηλικία αγοραστές αγόρασαν 38 από τα 55 ζευγάρια παπουτσιών καφέ χρώματος που αγοράστηκαν συνολικά, και επίσης αγόρασαν τα μισά από τα ζευγάρια παπουτσιών άσπρου χρώματος που αγοράστηκαν συνολικά.

4. Οι Ηλικιωμένοι αγόρασαν ίσο αριθμό ζευγαριών παπουτσιών μαύρου χρώματος και καφέ χρώματος.

Εάν οι Νέοι σε ηλικία αγοραστές αγόρασαν ένα ζευγάρι μαύρων παπουτσιών λιγότερο από τα ζευγάρια μαύρων παπουτσιών που αγόρασαν οι Ηλικιωμένοι, τότε η πιθανότητα ένας Μεσήλικας να αγόρασε μαύρα παπούτσια είναι:

Α. 0%

Β. 20%

Γ. 40%

Δ. 50%

ΛΥΣΗ

Αριθμός Νέων σε ηλικία αγοραστών = 2 x αριθμός των Μεσήλικων.

Αριθμός των Μεσήλικων = 2 x αριθμός των Ηλικιωμένων

Συνολικός αριθμός ζευγαριών παπουτσιών που αγοράσθηκαν= 140

Συνεπώς, έχουμε μια αναλογία 4:2:1. Άρα αγοράσθηκαν : (4/7).140 = 80 ζευγάρια παπούτσια από τους Νέους σε ηλικία, (2/7).140 = 40 ζευγάρια παπούτσια από τους Μεσήλικες και (1/7).140 = 20 ζευγάρια παπούτσια από τους Ηλικιωμένους.

Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Ηλικιωμένοι	**Μεσήλικες**	**Νέοι**	**Σύνολο**
Άσπρο			43 - κ	
Μαύρο	κ	x	κ - 1	
Καφέ	κ	y	38	55
Σύνολο	20	40	80	140

Έστω κ : ο αριθμός των ηλικιωμένων που αγόρασαν μαύρα παπούτσια.

Ο αριθμός των Νέων που αγόρασαν μαύρα παπούτσια ήταν κ – 1.

Τότε οι Νέοι που αγόρασαν άσπρα παπούτσια ήταν = 80 – (38 + κ – 1) = 43 – κ

Ως εκ τούτου, οι Ηλικιωμένοι που αγόρασαν άσπρα παπούτσια + Μεσήλικες που αγόρασαν άσπρα παπούτσια = 43 – κ. Επίσης, το σύνολο των ηλικιωμένων + Μεσήλικες. = 60

Άρα:

(Ηλικιωμένοι που αγόρασαν άσπρα + Μεσήλικες που αγόρασαν άσπρα) + (Ηλικιωμένοι που αγόρασαν μαύρα + Μεσήλικες που αγόρασαν μαύρα) + (Ηλικιωμένοι που αγόρασαν καφέ + Μεσήλικες που αγόρασαν καφέ) = 60 => (43 – k) + (k + x) + (k + y) = 60.

Αλλά, κ + y + 38 = 55 => k + y = 17.

Συνεπώς, 43 – k + k + x +17 = 60 => x = 0. Άρα p = 0. Σωστή απάντηση η Α.

Εκδοχή 3

1. Ένα δείγμα αποτελείται από ακέραιες θετικές τιμές όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές μεταξύ τους. Η μέση τιμή του δείγματος είναι μ = 32. Όταν στο δείγμα προσθέσουμε και την τιμή 23 η νέα μέση τιμή γίνεται 31.
Έστω ότι η διάμεσος του δεύτερου δείγματος είναι 33, οι 3 μικρότερες παρατηρήσεις του είναι ίσες μεταξύ τους και όλες οι μεγαλύτερες της διαμέσου παρατηρήσεις είναι ίσες μεταξύ τους. Να βρεθούν:
α) Το μέγεθος του αρχικού δείγματος.
β) Η μεγαλύτερη δυνατή τιμή που μπορούν να πάρουν οι μεγαλύτερες της διαμέσου παρατηρήσεις στο δεύτερο δείγμα.

Α α) 6 β) 43
Β α) 7 β) 44
Γ α) 8 β) 55
Δ α) 9 β) 52

ΛΥΣΗ

α) Έστω ν το μέγεθος του αρχικού δείγματος. Το άθροισμα των τιμών του είναι 32ν.
Όταν στο δείγμα βάλουμε και την τιμή 23, το άθροισμα των τιμών του δεύτερου δείγματος είναι $32\nu + 23$ και το πλήθος των τιμών του είναι $\nu + 1$.
Άρα, $31 = \frac{32\nu+23}{\nu+1} \Leftrightarrow 32\nu + 23 = 31\nu + 31 \Leftrightarrow \nu = 8$
β) Για τις τιμές του δεύτερου δείγματος ισχύουν: η μέση τιμή είναι 31, η διάμεσος είναι 33, οι 3 μικρότερες παρατηρήσεις είναι ίσες μεταξύ τους και οι 4 μεγαλύτερες της διαμέσου παρατηρήσεις είναι ίσες μεταξύ τους. Επίσης, ισχύει ότι μια παρατήρηση έχει τιμή 23 και επομένως η τιμή αυτή είναι αριστερά από τη διάμεσο. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
1η περίπτωση
Οι τρεις μικρότερες παρατηρήσεις είναι ίσες μεταξύ τους και μικρότερες από 23
α, α, α, 23, 33, β, β, β, β
$31 = \frac{3\alpha+23+33+4\beta}{9} \Leftrightarrow 3\alpha + 4\beta + 56 = 279 \Leftrightarrow$
$3\alpha + 4\beta = 223 \Leftrightarrow \beta = \frac{223-3\alpha}{4} \Leftrightarrow \beta = \frac{224-(1+3\alpha)}{4} \Leftrightarrow \beta = 56 - \frac{1+3\alpha}{4}$
Πρέπει ο αριθμός β να είναι θετικός ακέραιος. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει ο α να είναι της μορφής $\alpha = 4\kappa + 1$ με $\kappa \in Z$.
Για $\kappa = 0$ είναι $\alpha = 1$ και $\beta = 55$
Για $\kappa = 1$ είναι $\alpha = 5$ και $\beta = 52$
Επειδή θέλουμε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του β σταματάμε και θεωρούμε $\alpha = 1, \beta = 55$.
Επομένως οι τιμές είναι: 1, 1, 1, 23, 33, 55, 55, 55, 55

2η περίπτωση

Οι τρεις μικρότερες παρατηρήσεις είναι ίσες με 23.

23, 23, 23, α, 33, β, β, β, β

$31 = \frac{\alpha+69+33+4\beta}{9} \Leftrightarrow \alpha + 4\beta + 102 = 279 \Leftrightarrow$

$\alpha + 4\beta = 177 \Leftrightarrow \beta = \frac{177-\alpha}{4} \Leftrightarrow \beta = \frac{180-(3+\alpha)}{4} \Leftrightarrow \beta = 45 - \frac{3+\alpha}{4}$

Πρέπει ο αριθμός β να είναι θετικός ακέραιος. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει ο α να είναι της μορφής $\alpha = 4\kappa + 1$ με $\kappa \in Z$.

Πρέπει α ≥ 23

Για $\kappa = 6$ είναι $\alpha = 25$ και $\beta = 38$

Για $\kappa = 7$ είναι $\alpha = 29$ και $\beta = 37$

Επειδή θέλουμε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του β σταματάμε και θεωρούμε $\alpha = 25, \beta = 38$.

Επομένως οι τιμές είναι: 23, 23, 23, 25, 33, 38, 38, 38, 38

Από τις 2 παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του β είναι 55.

2. Σε μία επιχείρηση εργάζονται 10 άνδρες με μέσο μισθό 980 ευρώ και ένας αριθμός γυναικών. Αν ο μέσος μισθός όλων των ανδρών και των γυναικών που εργάζονται στην επιχείρηση είναι 960 ευρώ και κανένας μισθός δεν είναι μικρότερος των 915 ευρώ, να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός των γυναικών που εργάζονται στην επιχείρηση.

Α. 4

Β. 5

Γ. 6

Δ. 7

ΛΥΣΗ

Αν ν_A είναι ο αριθμός των αντρών, ν_Γ είναι ο αριθμός των γυναικών, μ_A είναι ο μέσος μισθός των αντρών και , μ_Γ είναι ο μέσος μισθός των γυναικών, ισχύει:

$960 = \frac{10\cdot980+\nu_\Gamma\cdot\mu_\Gamma}{10+\nu_\Gamma} \Leftrightarrow 9800 + \nu_\Gamma \cdot \mu_\Gamma = 9600 + 960\nu_\Gamma \Leftrightarrow 200 = \nu_\Gamma(960 - \mu_\Gamma)$

Όμως

$\mu_\Gamma \geq 915 \Leftrightarrow -\mu_\Gamma \leq -915 \Leftrightarrow 960 - \mu_\Gamma \leq 45 \Leftrightarrow \nu_\Gamma(960 - \mu_\Gamma) \leq 45\nu_\Gamma \Leftrightarrow$

$45\nu_\Gamma \geq 200 \Leftrightarrow \nu_\Gamma \geq 4{,}44$

Άρα ο ελάχιστος αριθμός των γυναικών που εργάζονται στην επιχείρηση είναι 5.

3. Για κάθε θετικό ακέραιο n, έστω p_n και s_n το γινόμενο και το άθροισμα, αντίστοιχα, των ψηφίων του ακεραίου n. Η πιθανότητα να επιλέξουμε έναν ακέραιο του διαστήματος 10 < n < 1000, τέτοιον ώστε $p_n + s_n = n$, είναι:

Α. 0,91%

Β. 1,01%

Γ. 1,05%

Δ. 1,15%

ΛΥΣΗ

Έστω ο ακέραιος n έχει δύο ψηφία. Τότε n = 10κ + λ . Ισχύει όμως ότι p_n = κ.λ και ότι s_n = κ + λ .

Άρα :

κ.λ + κ + λ = 10κ + λ => κ.λ - 9κ =0 => κ.(λ - 9) =0 => λ = 9. Συνεπώς οι διψήφιοι που επαληθεύουν την συνθήκη είναι οι : 19, 29, 39......,99 , δηλ. στο σύνολο 9 αριθμοί.

Έστω ο ακέραιος n έχει τρία ψηφία. Τότε n = 100κ + 10λ + μ. Ισχύει όμως ότι p_n = κ.λ.μ και ότι s_n = κ + λ + μ. Άρα : κ.λ.μ + κ + λ + μ = 100κ +10λ + μ => λ.μ = 99κ + 9(λ/μ) . Επειδή η μέγιστη τιμή που μπορούν να λάβουν τα λ και μ είναι 9 , θα πρέπει 81 = 99κ + 9 => 99κ = 72 => κ = 0,73 < 1. Άρα πάντα οι τιμή του κ στην παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να είναι <1 . Συνεπώς δεν υπάρχει τριψήφιος αριθμός.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι : ρ = 9/989 = 0,91%. Σωστή απάντηση η Α.

4. Μια συνάρτηση f(x) ικανοποιεί τη σχέση f(1) = 3600 και f(1) + f(2) + ... + f(n) = n^2f(n), για όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς με n > 1. Η μέση τιμή και η διάμεσος των 1000 πρώτων όρων της συνάρτησης διαφέρουν σε απόλυτη τιμή κατά περίπου:

Α. 4,158
Β. 7,164
Γ. 9,135
Δ. 11,125

ΛΥΣΗ

Ας προσπαθήσουμε αρχικά να βρούμε κάποιες τιμές και τον γενικό όρο της συνάρτησης f(x) για να καταλάβουμε την συμπεριφορά της. Γνωρίζουμε ότι f(1) = 3600 .

για n = 2 έχουμε : f(1) + f(2) = 2^2f(2) = 4f(2) => 3.600 + f(2) = 4f(2) => f(2) = 1.200

για n = 3 έχουμε : f(1) + f(2) + f(3)= 3^2f(3) = 9f(3) => 4.800 + f(3) = 9f(3) => f(3) = 600

για n = 4 έχουμε : f(1) + f(2) + f(3) + f(4)= 4^2f(4) = 16f(4) => 5.400 + f(4) = 16f(4) => f(4) = 360

Παρατηρούμε επομένως ότι έχουμε μια ακολουθία θετικών αριθμών της μορφής

3.600, 1.200, 600, 360,………. Ας δούμε τώρα πιο προσεκτικά αυτούς τους αριθμούς. Βλέπουμε ότι : f(1) = 3.600, f(2) = 3.600/3, f(3) = 3.600/6 , f(4) = 3.600/10, ……...=>

f(1) = 7.200/2, f(2) = 7.200/2.3, f(3) = 7.200/3.4 , f(4) = 7.200/4.5, ………

Συνεπώς θα πρέπει να ισχύει ότι f(n) = 7.200/n(n+1) , n $\geq$ 1.

Επειδή το πλήθος των αριθμών είναι άρτιο η διάμεσος θα είναι η μέση τιμή της 500ής και της 501ης παρατήρησης. Άρα

δ = (f(500) + f(501))/2 = (0,02874 + 0,02863)/2 = 0,0287

Για να υπολογίσουμε την μέση τιμή θα πρέπει να βρούμε το άθροισμα

f(1) + f(2) + f(3) +...+f(n) . Γνωρίζουμε ότι f(n) = 7.200/n(n+1) = 7.200(1/n(n+1)) =

7.200(1/n – 1/n+1). Άρα

3.600 + 1.200 + 600 + 360 +……. = 7.200(1 – 1/2) +7.200(1/2 - 1/3) + 7.200(1/3 – 1/4) + ……

Τελικά απομένει ότι το τελικό άθροισμα θα είναι

7.200 – 7200/(n+1) = 7.200n / (n+1) , και για n = 1.000 θα έχουμε

f(1) + f(2) +….+ f(1.000) = 7.200(1.000)/1.001 = 7.192,8072.

Συνεπώς , η μέση τιμή αυτών θα είναι μ = 7,1928.

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς της μέσης τιμής και της διαμέσου θα είναι :

7,1928 – 0,0287 = 7,164

Σωστή απάντηση η Β.

5. Ένα εργοστάσιο παρασκευάζει 10.000 μονάδες ενός προϊόντος χρησιμοποιώντας 4 μηχανές παραγωγής. Κατά τη διάρκεια ενός ποιοτικού ελέγχου βρέθηκαν 300 μονάδες ελαττωματικές. Ο αριθμός των μονάδων που παρασκευάζει η μηχανή Α είναι διπλάσιος από αυτούς της μηχανής Β και της μηχανής Γ συνολικά. Ο αριθμός των μονάδων που παρασκευάζει η μηχανή Β είναι ίδιος με τον αριθμό των μονάδων που παρασκευάζει η μηχανή Γ. Τα ποσοστά των ελαττωματικών μονάδων είναι 5,5% για τη μηχανή Α, 6% για τη μηχανή Β, 3% για τη μηχανή Γ και 1% για τη μηχανή Δ. Η πιθανότητα μία ελαττωματική μονάδα να προέρχεται από τη μηχανή Γ είναι:

Α. 8%
Β. 16%
Γ. 20%
Δ. 24%

ΛΥΣΗ

Έστω x ο αριθμός των μονάδων που παρασκευάζει η μηχανή Β. Τότε x θα είναι και ο αριθμός των μονάδων που παρασκευάζει η μηχανή Γ, $4x$ ο αριθμός των μονάδων που παρασκευάζει η μηχανή Α και $10.000 - 6x$ ο αριθμός των μονάδων που παρασκευάζει η μηχανή Δ.

Επομένως, ισχύει

$4x \cdot \frac{5,5}{100} + x \cdot \frac{6}{100} + x \cdot \frac{3}{100} + (10.000 - 6x) \cdot \frac{1}{100} = 300 \Leftrightarrow$

$22x + 6x + 3x + 10.000 - 6x = 30.000 \Leftrightarrow$

$25x = 20.000 \Leftrightarrow x = 800$

Επομένως, ο αριθμός των μονάδων που παρασκευάζει η μηχανή Γ είναι 800.

Ο αριθμός των ελαττωματικών μονάδων που παρασκευάζει η μηχανή Γ είναι

$\frac{3}{100} \cdot 800 = 24$

Η πιθανότητα μια ελαττωματική μονάδα να προέρχεται από τη μηχανή Γ είναι

P(A) = $\frac{24}{300} = 0,08 = 8\%$

6. Σύμφωνα με στοιχεία που προέρχονται από μία ανεξάρτητη Αρχή, η μέση τιμή ανά λίτρο της αμόλυβδης βενζίνης, σε ευρώ, από την 1η Σεπτεμβρίου 2023 έως την 1η Δεκεμβρίου 2023, δίνεται από τη συνάρτηση

F(x) = 1,5 - 0,19(x-3), όπου F(x) είναι η μέση τιμή ανά λίτρο x μήνες μετά την 1η Σεπτεμβρίου.

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τις πραγματικές μέσες τιμές της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο την 1η ημέρα των μηνών Σεπτέμβριος - Δεκέμβριος:

Μήνας	Πραγματική μέση τιμή αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο (€), την 1η του μήνα
Σεπτέμβριος	**1,90**
Οκτώβριος	**1,75**
Νοέμβριος	**1,40**
Δεκέμβριος	**1,35**

Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

I. Η μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο την 1η Σεπτεμβρίου 2023, σύμφωνα με τα στοιχεία της ανεξάρτητης Αρχής, ήταν 1,50 ευρώ.

II. Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης της πραγματικής μέσης τιμής και της εκτιμώμενης μέσης τιμής της αμόλυβδης βενζίνης από την ανεξάρτητη Αρχή ανά λίτρο, κατά τη διάρκεια των τεσσάρων μηνών, υποδηλώνει μια πολύ ισχυρή γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών.

III. Με βάση το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή την πραγματική μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης και ανεξάρτητη μεταβλητή την εκτιμώμενη μέση τιμή της, η πραγματική μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο στις 15 Νοεμβρίου ήταν 1,39 ευρώ.

IV. Χρησιμοποιώντας το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή την εκτιμώμενη μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης και ανεξάρτητη μεταβλητή την πραγματική μέση τιμή της, προκύπτει ότι μέση πραγματική τιμή της αμόλυβδης βενζίνης 1,5 ευρώ ήταν στις 27 Οκτωβρίου.

Α. Η I και η II
Β. Η II και η III
Γ. Η II και η IV
Δ. Η I και η IV

ΛΥΣΗ

Ας εξετάσουμε αναλυτικά τις παραπάνω προτάσεις:

I. Δεδομένου ότι το 1,5 είναι σταθερός όρος, αντιπροσωπεύει μια πραγματική τιμή της τιμής της αμόλυβδης βενζίνης και όχι ένα μέτρο της μεταβολής της τιμής της. Για να προσδιορίσουμε ποια τιμή αντιπροσωπεύει, βρίσκουμε το x έτσι ώστε $F(x) = 1{,}5 \Rightarrow x = 3$. Επομένως, η εκτιμώμενη μέση τιμή της αμόλυβδης βενζίνης είναι 1,5 Ευρώ ανά λίτρο 3 μήνες μετά την 1η Σεπτεμβρίου 2023, δηλαδή την 1η Δεκεμβρίου 2023. Η πρόταση είναι λάθος

II. Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

Μήνας	X	Πραγματική μέση τιμή βενζίνης Y ανά λίτρο (€)	Εκτιμώμενη μέση τιμή βενζίνης F(X) ανά λίτρο (€)
Σεπτέμβριος	0	1,90	2,07
Οκτώβριος	1	1,75	1,88
Νοέμβριος	2	1,40	1,69
Δεκέμβριος	3	1,35	1,5
Σύνολο		6,40	7,14

Χρησιμοποιώντας και εφαρμόζοντας το τύπο γραμμικής συσχέτισης του Pearson βρίσκουμε ότι r = 0,976. Η τιμή αυτή υποδηλώνει μια πολύ ισχυρή γραμμική συσχέτιση. Η πρόταση είναι σωστή.

ΙΙΙ. Υπολογίζουμε την εξίσωση της γραμμικής παλινδρόμησης της Y πάνω στην F(x). Κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς βρίσκουμε ότι : Y = -0,473 + 1,154F(x). Στις 15 Νοεμβρίου η τιμή της μεταβλητής X είναι 2,5. Συνεπώς , F(2,5) = 1,5 - 0,19(2,5 - 3) = 1,595. Άρα η εκτιμώμενη πραγματική τιμή της αμόλυβδης βενζίνης ανά λίτρο ήταν Y = -0,473 + 1,154(2,5) = 1,37 Ευρώ. Η πρόταση είναι λάθος.

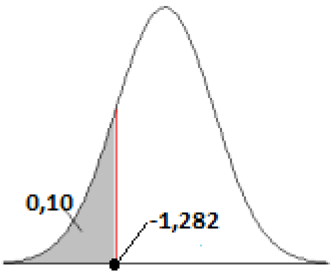
IV. Υπολογίζουμε την εξίσωση της γραμμικής παλινδρόμησης της F(x) πάνω στην Y. Κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς βρίσκουμε ότι : F(x) = -0,477 + 0,826Y. Εάν Y = 1,5 τότε F(X) = -0,477 + 0,826(1,5) = 1,716. Άρα,

1,716 = 1,5 - 0,19(X - 3) => X = 1,863. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί περίπου στις 27 Οκτωβρίου και η πρόταση είναι σωστή.

Συνεπώς , σωστή απάντηση η Γ.

7. Η βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 70 και διακύμανση 25. Μεταξύ ποιων τιμών, συμμετρικών ως προς τη μέση τιμή, βρίσκεται το 80% των

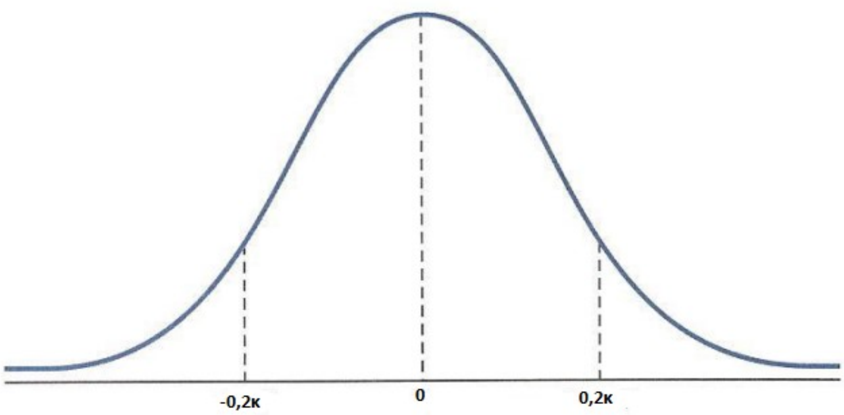
παρατηρήσεων της κατανομής, εάν ισχύει το παρακάτω διάγραμμα για τις τυποποιημένες παρατηρήσεις της παραπάνω κατανομής;



Α. 62,58 και 77,42
Β. 63,59 και 76,41
Γ. 61,88 και 78,12
Δ. 64,37 και 75,63

ΛΥΣΗ

Έστω ένα σημείο κ από το -∞ έως το +∞ των τιμών της κανονικής κατανομής. Θα πρέπει επομένως να ισχύει για την τιμή του κ ότι : $P [|X - 70| \leq κ] = 0,80 \Rightarrow P [-κ \leq X - 70 \leq κ] = 0,80 \Rightarrow P [70 - κ \leq X \leq 70 + κ] = 0,80$. Τυποποιούμε τώρα τις βαθμολογίες. Δεδομένου ότι οι αρχικές βαθμολογίες ακολουθούν κανονική κατανομή και οι τυποποιημένες θα ακολουθούν επίσης κανονική κατανομή. Άρα, $P [((70 - κ) - 70)/5 \leq (X - μ)/σ \leq ((70 + κ) - 70)/5] = 0,80 \Rightarrow P [- κ/5 \leq Z \leq κ/5] = 0,80 \Rightarrow P [- 0,2κ \leq Z \leq 0,2κ] = 0,8$. Ας παρατηρήσουμε τώρα το παρακάτω σχήμα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής



Παρατηρούμε ότι για να βρούμε το εμβαδόν από -0,2κ έως 0,2κ στην ουσία αφαιρούμε το εμβαδόν από -∞ έως -0,2κ από το εμβαδόν από -∞ έως 0,2κ . Αλλά λόγω συμμετρικότητας το εμβαδόν από

$-\infty$ έως -0,2κ είναι ίσον με το εμβαδόν 1- (εμβαδόν από $-\infty$ έως 0,2κ). Άρα, P [Z ≤ 0,2κ] - (1 - P [Z ≤ 0,2κ]) = 0,80 => 2 P [Z ≤ 0,2κ] = 1,80 => P [Z ≤ 0,2κ] = 0,90.

Εάν παρατηρήσουμε το σχήμα από τα δεδομένα της άσκησης λόγω συμμετρικότητας θα ισχύει ότι 0,2κ = 1,282 => κ = 6,41

Άρα το 80% των βαθμών των μαθητών θα είναι μεταξύ 70 - 6,41 = 63,59 και 70 + 6,41 = 76,41.

Σωστή απάντηση η Β.

8. 2.000 αυτόματοι τηλεφωνητές έχουν συνδεθεί στο τηλεφωνικό δίκτυο μιας μεγάλης πολυεθνικής εταιρείας για την εξυπηρέτηση των πελατών της. Οι αυτόματοι τηλεφωνητές εξυπηρετούν τους πελάτες στις εξής κατηγορίες : Λογαριασμοί και Πληρωμές (Α), Συμβόλαια και Υπηρεσίες (Β), Τεχνική Υποστήριξη (Γ) και Υπηρεσίες Γενικής Πληροφόρησης (Δ). Οι αυτόματοι τηλεφωνητές των κατηγοριών Α, Β και Γ μπορούν να εξυπηρετούν πολλαπλούς σκοπούς. Ωστόσο, ένας αυτόματος τηλεφωνητής που εξυπηρετεί πελάτες των κατηγοριών είτε Α, είτε Β, είτε Γ δεν μπορεί να εξυπηρετεί πελάτες της κατηγορίας Δ.

Στον απολογισμό που έγινε στο τέλος του έτους προέκυψαν τα ακόλουθα δεδομένα:

1. Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τους πελάτες της κατηγορίας Δ ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τόσο πελάτες της κατηγορίας Β όσο και πελάτες της κατηγορίας Γ, αλλά όχι πελάτες της κατηγορίας Α.

2. Το σύνολο των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν πελάτες και των 3 κατηγοριών Α, Β, και Γ ήταν 100.

3. Οι αριθμοί των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τις κατηγορίες των πελατών Α, Β, και Γ, όχι αποκλειστικά, ήταν σε αναλογία 2:1:1.

4. Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Β ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Γ. Αυτός ο αριθμός ήταν το 30% του αριθμού των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Α.

Ποια είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η πιθανότητα ένας τυχαίος πελάτης να εξυπηρετήθηκε από έναν αυτόματο τηλεφωνητή της κατηγορίας Συμβολαίων και Υπηρεσιών (Β);

Α. 25,25%

Β. 32,75%

Γ. 38,75%

Δ. 46,25%

ΛΥΣΗ

Δεδομένο 1 : Ένας αυτόματος τηλεφωνητής που εξυπηρετεί πελάτες των κατηγοριών είτε Α, είτε Β, είτε Γ δεν μπορεί να εξυπηρετεί πελάτες της κατηγορίας Δ.

Δεδομένο 2 : Οι αριθμοί των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τις κατηγορίες των πελατών Α, Β, και Γ (όχι αποκλειστικά) ήταν σε αναλογία 2:1:1. Έστω 2Κ, Κ, Κ οι αριθμοί των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τις κατηγορίες Α, Β και Γ, αντίστοιχα.

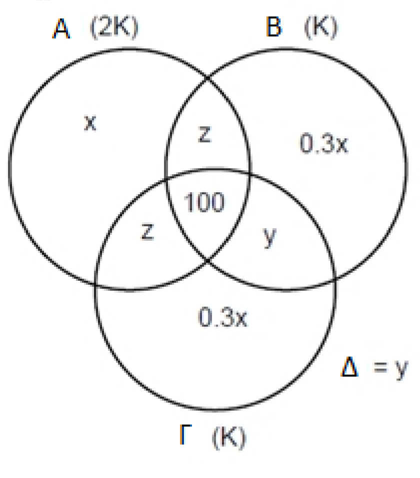
Δεδομένο 3 : Έστω x ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Α.

Δεδομένο 4 : Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Β ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν αποκλειστικά τους πελάτες της κατηγορίας Γ. Ο εν λόγω αριθμός είναι 0,3x.

Δεδομένο 5 : **.** Ο αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τους πελάτες της κατηγορίας Δ ήταν ίσος με τον αριθμό των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν τόσο πελάτες της κατηγορίας Β όσο και πελάτες της κατηγορίας Γ, αλλά όχι πελάτες της κατηγορίας Α. Έστω ότι αυτός ο αριθμός ήταν y.

Δεδομένο 6: Το σύνολο των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρέτησαν πελάτες και των 3 κατηγοριών Α, Β, και Γ ήταν 100.

Συνεπώς έχουμε το παρακάτω διάγραμμα Venn :



Με βάση το ανωτέρω διάγραμμα έχουμε τα ακόλουθες σχέσεις:

x + z + 0,3x + z + 100 + y + 0,3x + y = 2.000

1,6x + 2y + 2z = 1.900 (1)

Επίσης K = 0,3x + z + y +100

Οι αυτόματοι τηλεφωνητές που εξυπηρετούν τους πελάτες της κατηγορίας Α = 2Κ = x + 2z + 100

=> 2(0,3x + z + y + 100) = x + 2z + 100 => 0,4x = 2y + 100 => x = 5y + 250 (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

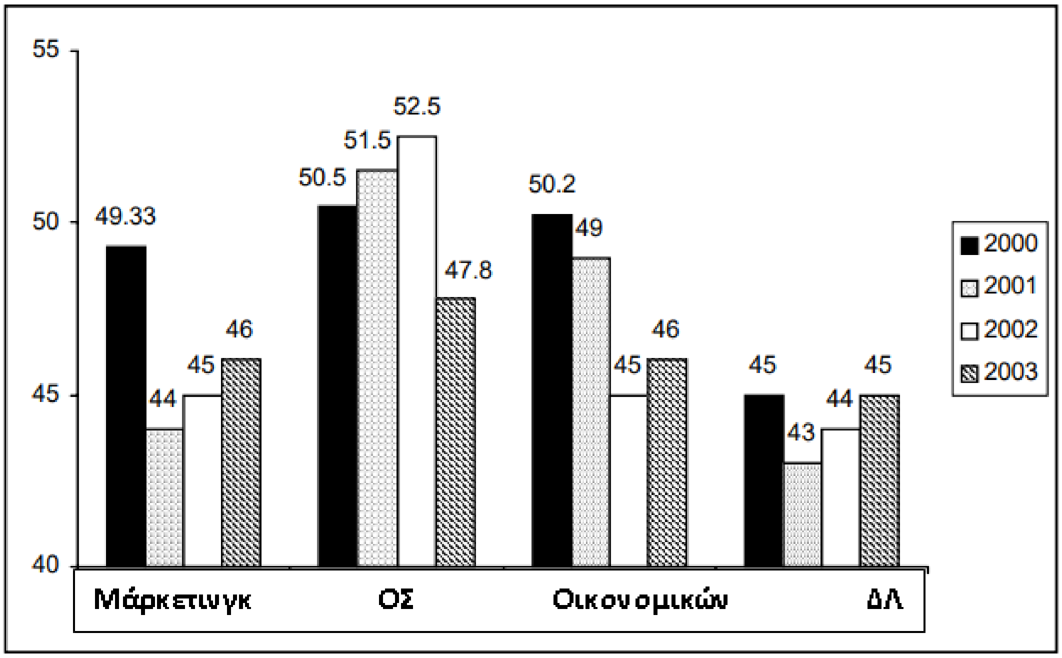
1,6 (5y + 250) + 2y + 2z = 1.900 => 10y + 2z = 1.500 => z = 750 – 5y (3)

Ισχύει ότι : αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρετούν τους πελάτες της κατηγορίας Β = z + 0,3x + 100 + y = (550 – 5y) + 0,3(5y + 250) + 100 + y = 925 – 2,5y.

Άρα ο μέγιστος αριθμός των αυτόματων τηλεφωνητών που εξυπηρετούν τους πελάτες της κατηγορίας Β είναι 925 όταν y = 0, και η μέγιστη δυνατή τιμή της ζητούμενης πιθανότητας είναι 925/2.000 = 0,4625 δηλ. 46,25%.

Σωστή απάντηση η Δ.

9. Ένα ιδιωτικό ΙΕΚ ιδρύθηκε την 1η Ιανουαρίου 2000 με 3, 4, 5 και 6 καθηγητές στα Τμήματα Μάρκετινγκ, Οργανωτικής Συμπεριφοράς (ΟΣ), Οικονομικών, και Διοίκησης Λειτουργιών (ΔΛ), αντίστοιχα. Κανένας νέος καθηγητής δεν συνταξιοδοτήθηκε ή εντάχθηκε στο ιδιωτικό ΙΕΚ κατά τους πρώτους τρεις μήνες του έτους 2000. Μέσα στα επόμενα τέσσερα χρόνια, το ιδιωτικό ΙΕΚ προσέλαβε έναν καθηγητή σε κάθε ένα από τα ανωτέρω τέσσερα Τμήματα. Όλοι οι νέοι καθηγητές ήταν 25 ετών τη στιγμή της ένταξής τους στο ιδιωτικό ΙΕΚ και όλοι τους εντάχθηκαν την 1η Απριλίου. Κατά τη διάρκεια αυτών των τεσσάρων ετών, ένας καθηγητής συνταξιοδοτήθηκε σε ηλικία 60 ετών. Δύο καθηγητές στο Τμήμα Μάρκετινγκ που εργάζονται στο ιδιωτικό ΙΕΚ από την ίδρυσή του έχουν γενέθλια στις 20 Νοεμβρίου. Ο ένας γεννήθηκε το 1947 και ο άλλος το 1950. Στο παρακάτω ραβδόγραμμα εμφανίζεται η μέση ηλικία (από άποψη αριθμού συμπληρωμένων ετών) των καθηγητών την 1η Απριλίου των ετών 2000, 2001, 2002 και 2003.



Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ;

I. Ο καθηγητής που συνταξιοδοτήθηκε ήταν μέλος του Τμήματος Μάρκετινγκ.

II. Την 1η Απριλίου 2005, ο τρίτος καθηγητής που εργάζεται στο ιδιωτικό ΙΕΚ από την ίδρυσή του ήταν 52 ετών.

III. Ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα Οικονομικών το 2002.

IV. Ο νέος καθηγητής που εντάχθηκε στο Τμήμα Διοίκησης Λειτουργιών ήταν 29 ετών την 1η Απριλίου 2003.

Α. Η I και η II
Β. Η II και η IV
Γ. Η II και η III
Δ. Η I και η III

ΛΥΣΗ

Σε οποιοδήποτε Τμήμα σε κάθε δεδομένο έτος, ο μέσος όρος της ηλικίας κυμαίνεται μεταξύ 42-53 έτη. Επίσης,

Α. Όταν ένας 25χρονος εντάσσεται στο Τμήμα, η μέση ηλικία πέφτει κατά τουλάχιστον 5 έτη.

Β. Όταν ένας 60χρονος συνταξιοδοτείται η πτώση είναι μικρότερη συγκρινόμενη με την περίπτωση Α.

Ας εξετάσουμε τώρα τις παραπάνω προτάσεις:

I. Στο ραβδόγραμμα μια πτώση αντιστοιχεί στον νέο 25χρονο που εντάχθηκε στο Τμήμα. Ωστόσο, δύο πτώσεις αντιστοιχούν στην ένταξη του νέου 25χρονου και την συνταξιοδότηση του 60χρονου. Αυτό το χαρακτηριστικό παρατηρείται μόνο στο Τμήμα Οικονομικών. Άρα η πρόταση είναι Λάθος.

II. Από το ραβδόγραμμα προκύπτει ότι ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα Μάρκετινγκ το 2001. Την 1η Απριλίου 2000, η συμπληρωμένη ηλικία των δύο καθηγητών του Τμήματος ήταν 52 ετών και 49 ετών, χωρίς ιδιαίτερη σειρά. Η ηλικία του τρίτου καθηγητή του Τμήματος την 1η Απριλίου 2000 ήταν 49,33 × 3 – (52 + 49) = 47 έτη. Ως εκ τούτου, ο καθηγητής την 1η Απριλίου 2005 ήταν 52 ετών. Η πρόταση είναι Σωστή.

III. Δεδομένου ότι η πτώση θα είναι μικρότερη σε περίπτωση που ένας καθηγητής συνταξιοδοτηθεί σε σύγκριση με αυτή που ένας νέος ενταχθεί στη σχολή, είναι από το ραβδόγραμμα φανερό ότι ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα Οικονομικών το 2002. Η πρόταση είναι Σωστή.

IV. Για το Τμήμα Διοίκησης Λειτουργιών, η μόνη πτώση στο ραβδόγραμμα φαίνεται το έτος 2001. Έτσι, ο νέος καθηγητής εντάχθηκε στο Τμήμα το 2001. Ως εκ τούτου, την 1η Απριλίου 2003 ήταν 27 ετών. Η πρόταση είναι Λάθος.

Επομένως σωστή απάντηση η Γ.

10. Μια πολύ γνωστή αλυσίδα αθλητικών ειδών διαθέτει ένα είδος παπουτσιών ορειβασίας σε τρία χρώματα: Άσπρο, Μαύρο και Καφέ. Οι αγοραστές του συγκεκριμένου είδος παπουτσιών κατατάσσονται σύμφωνα με την εταιρεία σε τρεις ηλικιακές ομάδες, τους Νέους, τους Μεσήλικες και τους Ηλικιωμένους. Τα ακόλουθα δεδομένα είναι γνωστά για τους αγοραστές του προηγούμενου Σαββατοκύριακου:

1. Συνολικά αγοράστηκαν 140 ζευγάρια παπούτσια και κανένας αγοραστής δεν αγόρασε περισσότερα από ένα ζευγάρια.
2. Ο αριθμός των Μεσήλικων αγοραστών ήταν διπλάσιος από τον αριθμό των Ηλικιωμένων αγοραστών, ενώ ο αριθμός των Νέων σε ηλικία αγοραστών ήταν διπλάσιος από τον αριθμό των Μεσήλικων αγοραστών.
3. Οι Νέοι σε ηλικία αγοραστές αγόρασαν 38 από τα 55 ζευγάρια παπουτσιών καφέ χρώματος που αγοράστηκαν συνολικά, και επίσης αγόρασαν τα μισά από τα ζευγάρια των παπουτσιών άσπρου χρώματος που αγοράστηκαν συνολικά.
4. Οι Ηλικιωμένοι αγόρασαν ίσο αριθμό ζευγαριών παπουτσιών μαύρου χρώματος και καφέ χρώματος.

Εάν οι Νέοι σε ηλικία αγοραστές αγόρασαν ένα ζευγάρι μαύρων παπουτσιών λιγότερο από τα ζευγάρια μαύρων παπουτσιών που αγόρασαν οι Ηλικιωμένοι, τότε η πιθανότητα ένας Μεσήλικας να αγόρασε μαύρα παπούτσια είναι:

Α. 0%
Β. 20%
Γ. 40%
Δ. 50%

ΛΥΣΗ

Αριθμός Νέων σε ηλικία αγοραστών = 2 x αριθμός των Μεσήλικων.

Αριθμός των Μεσήλικων = 2 x αριθμός των Ηλικιωμένων

Συνολικός αριθμός ζευγαριών παπουτσιών που αγοράσθηκαν= 140

Συνεπώς, έχουμε μια αναλογία 4:2:1. Άρα αγοράσθηκαν : (4/7).140 = 80 ζευγάρια παπούτσια από τους Νέους σε ηλικία, (2/7).140 = 40 ζευγάρια παπούτσια από τους Μεσήλικες και (1/7).140 = 20 ζευγάρια παπούτσια από τους Ηλικιωμένους.

Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Ηλικιωμένοι	**Μεσήλικες**	**Νέοι**	**Σύνολο**
Άσπρο			43 - κ	
Μαύρο	κ	x	κ - 1	
Καφέ	κ	y	38	55
Σύνολο	20	40	80	140

Έστω κ : ο αριθμός των ηλικιωμένων που αγόρασαν μαύρα παπούτσια.

Ο αριθμός των Νέων που αγόρασαν μαύρα παπούτσια ήταν κ – 1.

Τότε οι Νέοι που αγόρασαν άσπρα παπούτσια ήταν = 80 – (38 + κ – 1) = 43 – κ

Ως εκ τούτου, οι Ηλικιωμένοι που αγόρασαν άσπρα παπούτσια + Μεσήλικες που αγόρασαν άσπρα παπούτσια = 43 – κ. Επίσης, το σύνολο των ηλικιωμένων + Μεσήλικες. = 60

Άρα:

(Ηλικιωμένοι που αγόρασαν άσπρα + Μεσήλικες που αγόρασαν άσπρα) + (Ηλικιωμένοι που αγόρασαν μαύρα + Μεσήλικες που αγόρασαν μαύρα) + (Ηλικιωμένοι που αγόρασαν καφέ + Μεσήλικες που αγόρασαν καφέ) = 60 => (43 – k) + (k + x) + (k + y) = 60.

Αλλά, κ + y + 38 = 55 => k + y = 17.

Συνεπώς, 43 – k + k + x +17 = 60 => x = 0. Άρα p = 0. Σωστή απάντηση η Α.

ΤΕΣΤ 2

1. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, ποιο ήταν το ποσοστό (%) θρησκευτικών και πολιτικών γάμων, αντίστοιχα, στο σύνολο των γάμων στη Χώρα μας, το έτος 2022;

49,3 / 50,7
40,3 / 45,7
51,3 / 49,7
45,3 / 55,5

05. Γάμοι κατά Τυπικό Τέλεσης (1991 - 2022)

2. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, ποιο ήταν το κατώφλι κινδύνου φτώχειας (σε ευρώ) ετησίως για τα μονοπρόσωπα νοικοκυριά της Χώρας (μετά τις κοινωνικές μεταβιβάσεις), το έτος 2023;

6.030
5.712
4.917
4.500

Εισόδημα και Συνθήκες Διαβίωσης των Νοικοκυριών (SILC) / 2023
https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SFA10/2023

3. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, πόσος ήταν ο μόνιμος πληθυσμός του οικισμού Αρεόπολις στην Περιφερειακή Ενότητα Λακωνίας, σύμφωνα με την Απογραφή Πληθυσμού - Κατοικιών 2021;

3.643
805
927
1.010

ΜΟΝΙΜΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ 2021 ΚΑΤΑ ΟΙΚΙΣΜΟ 29.03.2024

4. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, πόσο ήταν το Εμπορικό Ισοζύγιο (σε εκατομμύρια ευρώ) της Ελλάδος, για το σύνολο του έτους 2022;

-31.854,9
-38.790,5
-35.076,2
-44.300,6

12. Εισαγωγές - Αφίξεις, Εξαγωγές - Αποστολές και Εμπορικό Ισοζύγιο, με διάκριση Ενδοκοινοτικού Εμπορίου και Εμπορίου με Τρίτες Χώρες, σε Αξία και Ποσότητα (Προσωρινά Στοιχεία) (Ιανουαρίου 2004 - Μαρτίου 2024)

5. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, πόσος ήταν ο μόνιμος πληθυσμός με ξένη ιθαγένεια σε σύνολο Χώρας, σύμφωνα με την Απογραφή Πληθυσμού - Κατοικιών 2021;

765.598
665.598
965.598
565.598

Πίνακας Α03. Απογραφή Πληθυσμού 2021. Μόνιμος Πληθυσμός κατά ομάδες χωρών ιθαγένειας και ομάδες ηλικιών

6 Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποια χώρα της ΕΕ είχε τη μεγαλύτερη έκταση δασικής γης (σε χιλιάδες εκτάρια), το έτος 2020;

Γαλλία
Εσθονία
Αυστρία
Σουηδία

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/for_area/default/table?lang=en&category=for.for_sfm

7.Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, πόσοι ήταν οι απασχολούμενοι 15 ετών και άνω στην Αίγυπτο, το έτος 2017;

26.006.000
20.006.000
15.006.000
10.006.000

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/med_ps411/default/table?lang=en&category=noneu.noneu_h.med.med_ps

8.Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποια χώρα της ΕΕ είχε τις περισσότερες πωλήσεις φυτοφαρμάκων (σε κιλά), το έτος 2022;

Ιταλία
Γαλλία
Γερμανία
Ισπανία

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/aei_fm_salpest09/default/table?lang=en&category=agr.aei.aei_pes

9.Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποια χώρα της ΕΕ είχε τις περισσότερες εκπομπές αερίων θερμοκηπίου που προέρχονται από τη γεωργία, το έτος 2022;

Ιρλανδία
Δανία

Βουλγαρία
Ιταλία

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tai08/default/table?lang=en&category=cli.cli_gge

Υποσημείωση: Καθώς δεν αναφέρεται στην εκφώνηση η μονάδα μέτρησης των εκπομπών αερίων θερμοκηπίου, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί σύγχυση στους μαθητές για δύο ενδεχόμενες σωστές απαντήσεις, σας ενημερώνουμε ότι **οι απαντήσεις των μαθητών θεωρήθηκαν όλες σωστές**.

10.Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποια χώρα της ΕΕ είχε το μικρότερο ποσοστό % ανεργίας, το έτος 2023;

Τσεχία
Πολωνία
Σλοβενία
Μάλτα

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tps00203/default/table?lang=en&category=t_labour.t_employ.t_lfsi.t_une

ΤΕΣΤ 3

1. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, πόσο (%) αυξήθηκαν οι αφίξεις σε κάμπινγκ στην Ελλάδα κατά το έτος 2022 σε σχέση με το έτος 2021;

45,1
55,1
35,1
50,1
infographic-campsites-2022 - ELSTAT (statistics.gr)

2. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, σε ποιο είδος διατροφής καταγράφηκε η μεγαλύτερη μέση μηνιαία δαπάνη (σε ευρώ) των νοικοκυριών της Χώρας, το έτος 2022;

Λαχανικά
Γαλακτοκομικά προϊόντα
Αλεύρι, ψωμί, δημητριακά
Κρέας

infographic-household-budget-survey-2022 - ELSTAT (statistics.gr)

3. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, πόση ήταν η ποσότητα (σε τόνους) οστρακοειδών που αλιεύθηκαν στην Ελλάδα, κατά το έτος 2021;

551,1
451,1

351,1
751,1

infographic-sea-fishery-2021 - ELSTAT (statistics.gr)

4. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, πόσοι ήταν οι θάνατοι από νεοπλάσματα (σε χιλιάδες) στην Ελλάδα, κατά τα έτη 1938 και 2021;

1938	2021
3,8	30,7
4,8	20,7
6,8	40,7
7,8	50,7

infographic-causes-death-2021 - ELSTAT (statistics.gr)

5. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, πόσα ήταν τα εργατικά ατυχήματα στην Περιφέρεια Κρήτης, κατά το έτος 2014;

343
353
363
383
https://www.statistics.gr/el/infographic-work-accident

6. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, σε ποιο έτος, μεταξύ των ετών 2003 - 2023, πωλήθηκαν τα περισσότερα περιοδικά (σε εκατομμύρια τεύχη) στην Ελλάδα;

2007
2010
2020
2022

infographic-press-2023 - ELSTAT (statistics.gr)

7. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, ποιος ήταν ο αριθμός επισκεπτών με εισιτήριο (σε χιλιάδες) στους αρχαιολογικούς χώρους της Χώρας, κατά το έτος 2023;

9.922,4
3.680,3
5.782,2
13.407,3

https://www.statistics.gr/el/infographic-museums-arc-sites-2023

8. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, πόσα αυγά (σε εκατομμύρια τεμάχια) παράχθηκαν στην Ελλάδα, κατά το έτος 2022;

1.570,2
2.570,2
3.570,2
4.570,2

https://www.statistics.gr/documents/20181/18370024/DT_gewrgiki_2022_6_gr.png/ebea5aa3-0226-0cc0-c3ec-5b8a9b905ab4

9. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat "Digitalisation in Europe", έκδοσης 2024, ποια χώρα της ΕΕ είχε το μεγαλύτερο ποσοστό (%) ατόμων που συμμετείχαν σε κοινωνικά δίκτυα, επί του συνόλου του πληθυσμού που έκανε χρήση του διαδικτύου κατά τους τελευταίους 3 μήνες, το έτος 2023;

Δανία
Νορβηγία
Σουηδία
Κύπρος

(on-line activities)
Digitalisation in Europe – 2024 edition - Eurostat (europa.eu)

10. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat "Digitalisation in Europe", έκδοσης 2024, ποια χώρα της ΕΕ είχε το μεγαλύτερο ποσοστό παραδόσεων, από εστιατόρια, ηλεκτρονικών παραγγελιών ατόμων, επί του συνόλου του πληθυσμού που πραγματοποίησε online αγορές κατά τους τελευταίους 3 μήνες, το έτος 2023;

Ολλανδία
Μάλτα
Κύπρος
Ιρλανδία

(on-line shopping) - Goods and services bought online, 2023
Digitalisation in Europe – 2024 edition - Eurostat (europa.eu)