Κατηγορία Α: Λύκεια

Ερωτήσεις 1ου τεστ

Στο πρώτο τεστ υπάρχουν τρεις εκδοχές, ίσης γνωστικής αξίας. Κατά την έναρξη, η εκδοχή που πρέπει να απαντηθεί από την ομάδα επιλέγεται αυτόματα από το σύστημα.

Εκδοχή 1

1. Τοποθετούμε Κ, Κ = 2, …, 100 αριθμημένα κιβώτια στη σειρά. Κάθε κιβώτιο περιέχει κόκκινες μπάλες σε αριθμό ίσο με την ένδειξη του κάθε κιβωτίου και μαύρες μπάλες σε αριθμό ίσο με το τετράγωνο της ένδειξης του κιβωτίου. Από κάθε κιβώτιο εξάγουμε δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση. Έστω P_s η πιθανότητα να εξάγουμε μπάλες του ίδιου χρώματος και P_d η πιθανότητα να εξάγουμε μπάλες διαφορετικού χρώματος. Το πρώτο κιβώτιο, για το οποίο θα ισχύει η σχέση $|P_s - P_d| > 0{,}5$, θα είναι το κιβώτιο με την ένδειξη:

3
4
6
7

ΛΥΣΗ:

Έστω ν ο αριθμός των κόκκινων μπαλών και ν^2 ο αριθμός των μαύρων στο κιβώτιο με την ένδειξη Κ. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, $P_s = \frac{1}{\nu+1}.\frac{\nu-1}{\nu^2+\nu-1}+\frac{\nu}{\nu+1}.\frac{\nu^2-1}{\nu^2+\nu-1}$ και $P_d = \frac{1}{\nu+1}.\frac{\nu^2}{\nu^2+\nu-1}+\frac{\nu}{\nu+1}.\frac{\nu}{\nu^2+\nu-1}$.

Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση, καταλήγουμε ότι

$|P_s - P_d| = \left|\frac{\nu^3-2\nu^2-1}{(\nu+1).(\nu^2+\nu-1)}\right|$.

Δοκιμάζοντας διαδοχικές τιμές του ν, έχουμε ότι:

$\nu = 2$, $|P_s - P_d| = 0{,}067$
$\nu = 3$, $|P_s - P_d| = 0{,}182$
$\nu = 4$, $|P_s - P_d| = 0{,}326$
$\nu = 5$, $|P_s - P_d| = 0{,}425$
$\nu = 6$, $|P_s - P_d| = 0{,}498$
$\nu = 7$, $|P_s - P_d| = 0{,}555$

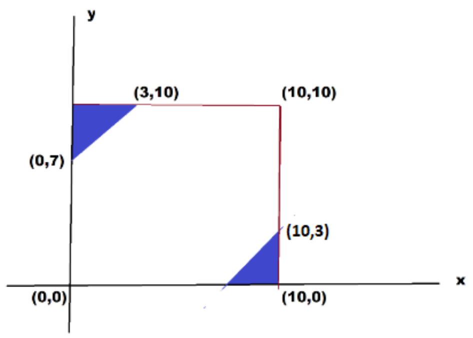
Σωστή απάντηση η Δ.

2. Επιλέγουμε δύο πραγματικούς αριθμούς του διαστήματος [0, 10]. Η πιθανότητα η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους να είναι το πολύ 7 είναι:
Υποσημείωση: Προτείνεται να λυθεί γραφικά.

49%
89%
91%
93%

ΛΥΣΗ:

Για την γρήγορη και πιο κατανοητή επίλυση χρησιμοποιούμε το παρακάτω σχήμα:



Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Εάν $x = 0$, τότε $y = 7$. Εάν η τιμή του x αυξάνει, η τιμή του y μειώνεται. Συνεπώς, μετακινούμαστε από το σημείο (0, 7) προς το σημείο (3, 10). Είναι η περίπτωση $x < y$.

2. Εάν $x = 10$, τότε $y = 3$. Εάν η τιμή του x μειώνεται, η τιμή του y μειώνεται. Συνεπώς, μετακινούμαστε από το σημείο (10, 3) προς το σημείο (7, 0). Είναι η περίπτωση $x > y$.

Είναι επομένως φανερό ότι οι ευνοϊκές περιπτώσεις δίνονται από το εμβαδόν του παραπάνω τετραγώνου εκτός του εμβαδού των δύο γραμμοσκιασμένων τριγώνων. Η ζητούμενη συνεπώς πιθανότητα θα είναι:

$$\frac{10^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\right)}{10^2} = \frac{91}{100} = 91\%$$

Σωστή απάντηση η Γ.

3. Ένα τετράγωνο πλευράς 3cm διαιρείται σε 9 μικρότερα τετράγωνα πλευράς 1cm το κάθε ένα. Σε κάθε τετράγωνο τοποθετούμε μία μόνο φορά έναν αριθμό από το 1 έως το 9. Η πιθανότητα να τοποθετήσουμε τους αριθμούς κατά τέτοιο τρόπο ώστε το τετράγωνο να γίνει μαγικό, δηλαδή το άθροισμα όλων των γραμμών, όλων των στηλών και των διαγωνίων του να είναι ο ίδιος αριθμός, είναι:

0,0022%
0,0125%
0,0145%
0,0155%

ΛΥΣΗ:

Μαγικό τετράγωνο είναι μια τετραγωνική ορθογώνια διάταξη θετικών ακέραιων αριθμών έτσι, ώστε το άθροισμα των αριθμών σε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιο να είναι το ίδιο.
Εάν το μαγικό τετράγωνο περιέχει καθέναν από τους θετικούς διαδοχικούς ακεραίους αριθμούς από το 1 μέχρι το ν^2 ακριβώς μια φορά, τότε αυτό καλείται κανονικό μαγικό τετράγωνο βαθμού ν. Μαγικά τετράγωνα μπορούν να κατασκευαστούν για κάθε ακέραιο αριθμό $\nu > 2$. Εάν ένα μαγικό τετράγωνο έχει ν γραμμές και ν στήλες, τότε λέμε ότι έχει τάξη ν. Το πλήθος των αριθμών του τετραγώνου τάξης ν είναι ν^2.

Εάν ο αριθμός ν είναι περιττός, τότε και ο $ν^2$ είναι περιττός, οπότε οι αριθμοί του μαγικού τετραγώνου έχουν μεσαίο όρο και βρίσκεται στο μεσαίο τετραγωνάκι. Ο αριθμός αυτός είναι ο μεσαίος όρος των αριθμών 1, 2, 3,..., $ν^2$.
Στο πρόβλημα μας έχουμε ένα μαγικό τετράγωνο τρίτης τάξης (ν = 3) και στο μεσαίο τετράγωνο θα πρέπει να τοποθετήσουμε τον αριθμό 5. Υπάρχουν τα εξής 8 μαγικά τετράγωνα που το άθροισμα των γραμμών, των στηλών και των διαγωνίων είναι ο περιττός αριθμός 15:

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

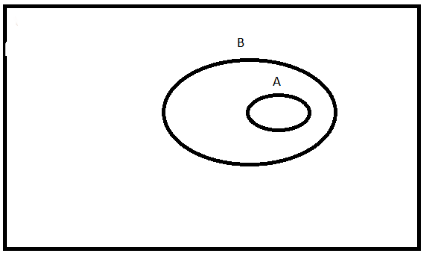
8	3	4
1	5	9
6	7	2

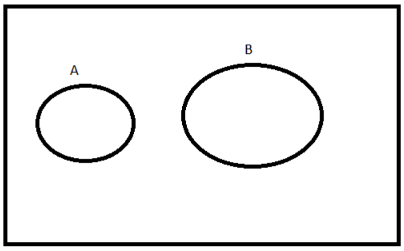
Στην πραγματικότητα υπάρχει ένα μόνο μαγικό τετράγωνο 3×3, γιατί τα άλλα που παίρνουμε προκύπτουν περιστρέφοντας ή κατοπτρίζοντας ένα από αυτά.
Μπορούμε να δημιουργήσουμε 9! πιθανά τετράγωνα και συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι
$\frac{8}{9!}$ x 100% = 0,0022%
Σωστή απάντηση η Α.

4. Η πιθανότητα η αξία της μετοχής Α να αυξηθεί κατά τη διάρκεια του επόμενου μήνα είναι 0,54, ενώ η πιθανότητα η αξία της μετοχής Β να αυξηθεί τον επόμενο μήνα είναι 0,68. Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να λάβει η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από αυτά τα δύο ενδεχόμενα, είναι:

0,147
0,254
0,320
0,457

ΛΥΣΗ:
Έστω Β το ενδεχόμενο «αύξηση της μετοχής Β» και Α το ενδεχόμενο «αύξηση της μετοχής Α». Τότε
$P(B) = 0,68$ και $P(B') = 1 – 0,68 = 0,32$. Ομοίως, $P(A) = 0,54$ και $P(A') = 1 – 0,54 = 0,46$.
Θα πρέπει να προσέξουμε ότι η άσκηση δεν μας λέει πως η αύξηση ή η μείωση της μετοχής Α επηρεάζει την αύξηση ή την μείωση της μετοχής Β. Αυτό σημαίνει ότι δεν γνωρίζουμε αν τα δύο ενδεχόμενα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα ή ανεξάρτητα.
Για να αντιληφθούμε την ζητούμενη πιθανότητα, ας δούμε τα παρακάτω διαγράμματα Venn:





Παρατηρώντας τα δύο διαγράμματα, είναι φανερό ότι η ζητούμενη μέγιστη πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από αυτά τα δύο γεγονότα παρατηρείται στην περίπτωση του πρώτου διαγράμματος. Είναι η περίπτωση στην οποία η τιμή της μετοχής Β θα μπορούσε να αυξηθεί χωρίς να αυξηθεί η τιμή της μετοχής Α, αλλά ο μόνος δυνατός τρόπος για να αυξηθεί η τιμή της μετοχής Α είναι να αυξηθεί η τιμή της μετοχής Β επίσης.
Συνεπώς, η μέγιστη τιμή της ζητούμενης πιθανότητας είναι 0,32 και η σωστή απάντηση είναι η Γ.

5. Ποια(ες) από τις παρακάτω προτάσεις σχετικά με τον Συντελεστή Μεταβλητότητας (CV) είναι σωστή(ές):

I. Ο Συντελεστής Μεταβλητότητας είναι ένα μέτρο σχετικής διασποράς των τιμών της τυχαίας μεταβλητής και όχι της απόλυτης διασποράς.
II. Ο Συντελεστής Μεταβλητότητας δεν χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να συγκρίνουμε τη βαθμολογία των μαθητών δύο τάξεων, όπου το εύρος της κλίμακας βαθμολογίας είναι πολύ διαφορετικό.
III. Επειδή ο Συντελεστής Μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης, μπορούμε πάντοτε να τον χρησιμοποιούμε για τη σύγκριση των μετρήσεων δύο φυσικών φαινομένων.

I.
I. και III.
II. και III.
Όλες είναι σωστές

ΛΥΣΗ:
Η πρόταση I. είναι σωστή εξ ορισμού.
Η πρόταση II. είναι λάθος. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας, απλά πιθανόν, όπου παρατηρείται μεγάλο εύρος τιμών, θα παρατηρείται και μεγαλύτερη ανομοιογένεια.
Η πρόταση III. είναι λάθος. Ας θεωρήσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα:
Έστω έναν χειμερινό μήνα σε δύο πόλεις Α και Β μετρήσαμε τις μέγιστες ημερήσιες θερμοκρασίες. Στην πόλη Α χρησιμοποιήσαμε την κλίμακα Fahrenheit παίρνοντας τις τιμές 35, 33, 28, 21. Κάνοντας πράξεις διαπιστώνουμε ότι CV = 21,33%. Στην πόλη Β χρησιμοποιήσαμε την κλίμακα Celsius, παίρνοντας τις τιμές -2, -1, 0, 1. Διαπιστώνουμε ότι CV = 258,198%. Προφανώς, είναι φανερό ότι υπάρχει κάπου λάθος, αφού, παρατηρώντας τις τιμές των θερμοκρασιών της Β πόλης αυτές θα πρέπει να είναι πιο ομοιογενείς. **Γενικά, πάντοτε αποφεύγουμε να χρησιμοποιούμε τον CV σε περιπτώσεις όπου η τυχαία μεταβλητή μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές και πιθανόν την τιμή 0.** Εάν μετατρέψουμε τις τιμές Celsius σε τιμές Fahrenheit θα έχουμε τις τιμές 28,4 , 30,2 , 32 , 33,8 με CV = 7,47%, ο οποίος φυσικά είναι και ο σωστός CV που συμβαδίζει και με τις τιμές των παρατηρήσεων μας.

Σωστή απάντηση η Α.

6. Σε μία τάξη ενός σχολείου, το 20% των μαθητών είναι αγόρια που δεν έχουν ποδήλατο, το 30% των μαθητών είναι κορίτσια που έχουν ποδήλατο. Η πιθανότητα κάποιος μαθητής να είναι αγόρι ή να έχει ποδήλατο είναι 90%. Εάν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, η πιθανότητα να έχει ποδήλατο είναι:

80%
70%
60%
40%

ΛΥΣΗ:
Έστω Α το ενδεχόμενο «είναι αγόρι», Π το ενδεχόμενο «έχει ποδήλατο» και Κ το ενδεχόμενο «είναι κορίτσι». Ισχύει ότι $K = A'$.
Από τα δεδομένα της άσκησης ισχύουν τα εξής:
$P(A \cap \Pi') = 0{,}20 \Rightarrow P(A) - P(A \cap \Pi) = 0{,}20$ (1)
$P(A' \cap \Pi) = 0{,}30 \Rightarrow P(\Pi) - P(A \cap \Pi) = 0{,}30$ (2)
$P(A \cup \Pi) = 0{,}90 \Rightarrow P(A) + P(\Pi) - P(A \cap \Pi) = 0{,}90$ (3)
Από τις (2), (3) προκύπτει
$P(A) + \{P(\Pi) - P(A \cap \Pi)\} = 0{,}90 \Rightarrow P(A) + 0{,}30 = 0{,}90 \Rightarrow P(A) = 0{,}60$
Από την (1) προκύπτει
$P(A) - P(A \cap \Pi) = 0{,}20 \Rightarrow 0{,}60 - P(A \cap \Pi) = 0{,}20 \Rightarrow P(A \cap \Pi) = 0{,}40$
Ζητείται η πιθανότητα $P(\Pi)$. Από τη (2) προκύπτει
$P(\Pi) - P(A \cap \Pi) = 0{,}30 \Rightarrow P(\Pi) - 0{,}40 = 0{,}30 \Rightarrow P(\Pi) = 0{,}70$

Σωστή απάντηση η Β.

7. Στο εσωτερικό κάθε μίας από τις πλευρές τετραγώνου θεωρούμε n διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Το πλήθος όλων των τριγώνων που έχουν κορυφές τα σημεία αυτά είναι:

$2n^2(5n-3)$
$4n^2(5n-3)$
$3n^2(n-4)$
$n^2(5n-6)$

ΛΥΣΗ:
Από τα 4n σημεία που βρίσκονται στις πλευρές του τετραγώνου μπορούμε να δημιουργήσουμε $\binom{4n}{3}$ τριάδες σημείων.
Όλες αυτές οι τριάδες σημείων δεν ορίζουν τρίγωνα γιατί κάποιες τριάδες αποτελούνται από συνευθειακά σημεία. Σε κάθε πλευρά υπάρχουν $\binom{n}{3}$ το πλήθος τριάδες που αποτελούνται από συνευθειακά σημεία. Άρα δημιουργούνται

$$\binom{4n}{3} - 4\binom{n}{3} = \frac{(4n)!}{3!(4n-3)!} - 4\frac{(n)!}{3!(n-3)!} = \frac{(4n-3)!(4n-2)(4n-1)(4n)}{3!(4n-3)!} - \frac{4(n-3)!(n-2)(n-1)(n)}{3!(n-3)!} =$$

$\frac{(4n-2)(4n-1)(4n)}{6} - \frac{4(n-2)(n-1)(n)}{6} = \frac{(4n)}{6}(4n-2)(4n-1) - \frac{(4n)}{6}(n-2)(n-1) =$

$\frac{(2n)}{3}(16n^2 - 12n + 2) - \frac{(2n)}{3}(n^2 - 3n + 2) = \frac{(2n)}{3}(16n^2 - 12n + 2 - n^2 + 3n - 2)$
=

$\frac{(2n)}{3}(15n^2 - 9n) = \frac{(2n)}{3}(3n)(5n-3) = 2n^2(5n-3)$ τρίγωνα.
Σωστή απάντηση η Α.

8. Οι 14 από τους 15 μαθητές ενός Λυκείου πήραν τους παρακάτω βαθμούς σε ένα test:
11, 17, 13, 11, 18, 19, 20, 13, 17, 10, 12, 17, 13, 19
Εάν η διάμεσος των παραπάνω βαθμών είναι ίση με τη μέση τιμή τους και ο 15^{ος} βαθμός είναι ακέραιος αριθμός, τότε αυτός είναι:

14
16
15
13

ΛΥΣΗ:
Γράφουμε τους βαθμούς με σειρά μεγέθους:
10, 11, 11, 12, 13, 13, 13, 17, 17, 17, 18, 19, 19, 20
Έστω α∈Ζ, ο άγνωστος βαθμός.
Η μέση τιμή των βαθμών είναι $\overline{x} = \frac{10+2\times11+12+3\times13+\cdots+20+\alpha}{15} = \frac{210+\alpha}{15}$
Όμως οι βαθμοί στα Λύκεια παίρνουν τιμές από 0 έως 20. Επομένως,
$0 \le \alpha \le 20 \Leftrightarrow 210 \le 210 + \alpha \le 230 \Leftrightarrow \frac{210}{15} \le \frac{210+\alpha}{15} \le \frac{230}{15} \Leftrightarrow 14 \le \frac{210+\alpha}{15} \le 15{,}3 \Leftrightarrow$
$14 \le \overline{x} \le 15{,}3$
Είναι $\overline{x} = \delta$, άρα $14 \le \delta \le 15{,}3$
Στους παραπάνω βαθμούς δεν υπάρχουν οι βαθμοί 14, 15. Θεωρούμε δύο περιπτώσεις:

- $\delta = 14$, τότε $\frac{210+\alpha}{15} = 14 \Leftrightarrow 210 + \alpha = 210 \Leftrightarrow \alpha = 0$
  Άτοπο γιατί, όταν α = 0 οι βαθμοί είναι
  0, 10, 11, 11, 12, 13, 13, 13, 17, 17, 17, 18, 19, 19, 20
  και τότε η διάμεσος είναι δ = 13
- $\delta = 15$, τότε $\frac{210+\alpha}{15} = 15 \Leftrightarrow 210 + \alpha = 225 \Leftrightarrow \alpha = 15$
  Δεκτή γιατί, όταν α = 15 οι βαθμοί είναι
  10, 11, 11, 12, 13, 13, 13, 15, 17, 17, 17, 18, 19, 19, 20
  και τότε η διάμεσος είναι δ = 15

Σωστή απάντηση η Γ.

9. Σε ένα τμήμα της Εθνικής Οδού, μήκους 30km, μετρήθηκαν οι χρόνοι σε min που έκαναν τα αυτοκίνητα για να το διανύσουν και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας κατανομής των σχετικών συχνοτήτων:

Χρόνοι σε min	Σχετική συχνότητα f_i(%)
[10, 15)	15
[15, 20)	30
[20, 25)	35
[25, 30)	20

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του χρόνου που χρειάστηκαν τα αυτοκίνητα για να διανύσουν το τμήμα αυτό.
(β) Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του 33% των πιο γρήγορων αυτοκινήτων.
(γ) Εάν η μέγιστη επιτρεπόμενη ταχύτητα ήταν 120km/h, να υπολογίσετε το ποσοστό των οδηγών που θα πάρουν κλήση από την Τροχαία.

(α) 20,5 min	(β) 100 km/h	(γ) 15%
(α) 21,5 min	(β) 110 km/h	(γ) 12%
(α) 20 min	(β) 105 km/h	(γ) 15%
(α) 20,5 min	(β) 110 km/h	(γ) 15%

ΛΥΣΗ:
(α) Για να υπολογίσουμε τη μέση τιμή του χρόνου, θα συμπληρώσουμε τον παρακάνω πίνακα. Έχουμε:

Χρόνοι	t_i	f_i(%)	f_i	$t_i \cdot f_i$
[10, 15)	12,5	15	0,15	1,875
[15, 20)	17,5	30	0,30	5,250
[20, 25)	22,5	35	0,35	7,875
[25, 30)	27,5	20	0,20	5,500
Σύνολο		100	1,00	20,500

Άρα η μέση τιμή του χρόνου είναι
$\bar{t} = \sum_{i=1}^{4} t_i \times f_i$ = 20,5min

(β) Παρατηρούμε ότι 33% = 15% + 18% = $f_1\% + \frac{3}{5}f_2\%$.
Επομένως, το 33% των πιο γρήγορων αυτοκινήτων αποτελείται από όλα τα αυτοκίνητα της κλάσης [10, 15) και τα 3/5 των αυτοκινήτων της κλάσης [15, 20), δηλαδή τα αυτοκίνητα που χρειάστηκαν το πολύ 18 min για να διανύσουν τα 30km.
Τα 18min είναι $\frac{18}{60}$ h = 0,3h.
Επομένως, $\bar{\upsilon} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{30}{0{,}3} = 100$km/h

(γ) Ισχύει $\bar{\upsilon} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{\bar{\upsilon}} \Leftrightarrow \Delta t = \frac{30}{120}$ = 0,25h = 0,25 x 60 = 15min
Άρα οι οδηγοί που έκαναν από 10 min έως 15min, δηλαδή οι οδηγοί της πρώτης κλάσης, είναι παραβάτες και θα πάρουν κλήση από την Τροχαία. Το αντίστοιχο ποσοστό είναι 15%.
Σωστή απάντηση η Α.

10. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οκτώ θεατές στις δώδεκα συνεχόμενες θέσεις ενός θεάτρου, εάν τρία συγκεκριμένα άτομα καθίσουν σε διαδοχικές θέσεις (ο ένας δίπλα στον άλλον);

151.200
907.200
599.400
698.220

ΛΥΣΗ:
Τα τρία συγκεκριμένα άτομα (επειδή θα καθίσει ο ένας δίπλα στον άλλο) μπορούν να καταλάβουν τις τρεις συνεχόμενες θέσεις 1, 2, 3 ή 2, 3, 4 ή . . . . ή 10, 11, 12.
Δηλαδή υπάρχουν 10 τρόποι κατάληψης των τριών διαδοχικών θέσεων.
Για κάθε έναν από τους παραπάνω τρόπους, υπάρχουν 3! = 6 τρόποι αντιμετάθεσης των τριών συγκεκριμένων ατόμων μεταξύ τους.
Άρα όλοι οι δυνατοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να καθίσουν τα τρία άτομα είναι
6 x 10 = 60.
Οι υπόλοιποι 5 θεατές μπορούν να καθίσουν στις 9 θέσεις με
$\frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{4!x5x6x7x8x9}{4!} = 5 \text{ x } 6 \text{ x } 7 \text{ x } 8 \text{ x } 9 = 15.120$ τρόπους.
Άρα όλοι οι δυνατοί τρόποι είναι 15.120 · 60 = 907.200.

Σωστή απάντηση η Β.

Εκδοχή 2

1. Ρίχνοντας ένα πειραγμένο ζάρι, έχουμε πιθανότητα 1/4 να φέρουμε ένδειξη 5, ενώ η πιθανότητα να φέρουμε οποιαδήποτε από τις ενδείξεις 1, 2, 3, 4 ή 6 είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της ένδειξης. Εάν ρίξουμε τρία τέτοια ζάρια, η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα τουλάχιστον 14, χωρίς όμως να φέρουμε την ένδειξη 6 σε κανένα ζάρι, είναι περίπου:

2,2%
3,1%
3,3%
4,4%

ΛΥΣΗ:
Γνωρίζουμε ότι p(i) = $\frac{c}{i^2}$, i = 1, 2, 3, 4, 6 και p(5) = $\frac{1}{4}$. Σύμφωνα με τον ορισμό των πιθανοτήτων θα πρέπει $\sum_1^6 p\ (i)$=1 $\Rightarrow$ p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 => c + $\frac{c}{4}$+ $\frac{c}{9}$+ $\frac{c}{16}$+ $\frac{1}{4}$+ $\frac{c}{36}$= 1 $\Rightarrow$ c = $\frac{108}{209}$= 0,5167.
Μπορούμε να δημιουργήσουμε τον παρακάτω πίνακα:

i	1	2	3	4	5	6
p(i)	0,5167	0,1292	0,0574	0,0323	0,25	0,0144

Θέλουμε να φέρουμε άθροισμα τουλάχιστον 14, χωρίς όμως να φέρουμε την ένδειξη 6 σε κανένα ζάρι. Επομένως, δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

ΑΘΡΟΙΣΜΑ	ΠΙΘΑΝΕΣ ΕΝΔΕΙΞΕΙΣ ΤΡΙΩΝ ΖΑΡΙΩΝ	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
14	4, 5, 5	(0,0323)x(0,25)x(0,25) = 0,00202
	5, 5, 4	(0,25)x(0,25)x(0,0323) = 0,00202
	5, 4, 5	(0,25)x(0,0323)x(0,25) = 0,00202
15	5, 5, 5	(0,25)x(0,25)x(0,25) = 0,0156

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

p = 0,00202 + 0,00202 + 0,0202 + 0,0156 = 0,02166, δηλαδή περίπου 2,2%.

Σωστή απάντηση η Α.

2. Επτά ακέραιοι αριθμοί έχουν εύρος 80 και διάμεσο 240. Η διάμεσος των τριών μικρότερων αριθμών είναι 180. Ποια από τις κατωτέρω τιμές μπορεί να λάβει το εύρος των τριών μεγαλύτερων αριθμών:

18
22
23
25

ΛΥΣΗ:

Έστω οι επτά ακέραιοι αριθμοί α, β, γ, δ, ε, ζ, η τοποθετημένοι σε αύξουσα σειρά. Τότε διάμεσος = δ και εύρος = η – α. Γνωρίζουμε ότι δ = 240, η – α = 80 και ότι β = 180. Ζητούμε την τιμή της διαφοράς η – ε. Οι αριθμοί μας είναι α, 180, γ, 240, ε, ζ, η. Για να βρούμε την μέγιστη τιμή του η, θα πρέπει α = 180. Τότε η – 180 = 80 ⇒ η = 260. Εάν η = 260, τότε ε = 240 και σε καμιά περίπτωση δεν μπορεί ε < 240, γιατί θα αλλάξει η διάμεσος. Συνεπώς, η μέγιστη τιμή της διαφοράς η – ε θα πρέπει να είναι 260 – 240 = 20 και η μικρότερη 0, εάν ε = ζ = η. Η μόνη τιμή που πληροί τις προϋποθέσεις του προβλήματος είναι η 18.

Σωστή απάντηση η Α.

3. Ο Κώστας έχει 5 κόκκινα φύλλα στο αριστερό του χέρι και 5 μπλε φύλλα στο δεξί του χέρι. Ανακατεύει όλα τα φύλλα μαζί και στη συνέχεια τοποθετεί 5 φύλλα, το ένα μετά το άλλο, στη σειρά πάνω στο τραπέζι. Η πιθανότητα να έχει τοποθετήσει κόκκινα φύλλα στη σειρά το ένα δίπλα στο άλλο και μπλε φύλλα, επίσης, το ένα δίπλα στο άλλο είναι:

18,75%
24,60%
34,75%
35,67%

ΛΥΣΗ:

Ζητούμε την πιθανότητα P(κόκκινα μαζί, μπλε μαζί) σε 5 φύλλα που τοποθετήθηκαν στη σειρά.

Σύνολο δυνατών περιπτώσεων: C(10, 5) x 5! = 2 x 3 x 7 x 6 x 5!

Για τα 5 φύλλα μπορούμε να έχουμε τις εξής περιπτώσεις.

Α. Επιλογή 5 κόκκινων ή 5 μπλε φύλλων. Σύνολο: 2 x 5! = 240 περιπτώσεις

Β. Επιλογή 4 κόκκινων φύλλων και 1 μπλε φύλλου. Σύνολο: 2! x [C(5, 4) x 4! x C(5, 1)] = 2 x 25 x 24

Επιλογή 4 μπλε φύλλων και 1 κόκκινου φύλλου. Σύνολο: 2! x [C(5, 4) x 4! x C(5, 1)] = 2 x 25 x 24

Άρα συνολικά 2.400 περιπτώσεις.

Γ. Επιλογή 3 κόκκινων φύλλων και 2 μπλε φύλλων. Σύνολο: 2! x [C(5, 3) x 3! x C(5,2) x 2!] = 2 x 10 x 6 x 10 x 2

Επιλογή 3 μπλε φύλλων και 2 κόκκινων φύλλων. Σύνολο: 2! x [C(5, 3) x 3! x C(5,2) x 2!] = 2 x 10 x 6 x 10 x 2

Άρα συνολικά 4.800 περιπτώσεις.

Συνεπώς, σύνολο ευνοϊκών περιπτώσεων: 240 + 2.400 + 4.800 = 7.440 περιπτώσεις.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{7.440}{2x3x7x6x5!} = \frac{31}{126}$ = 0,2460.

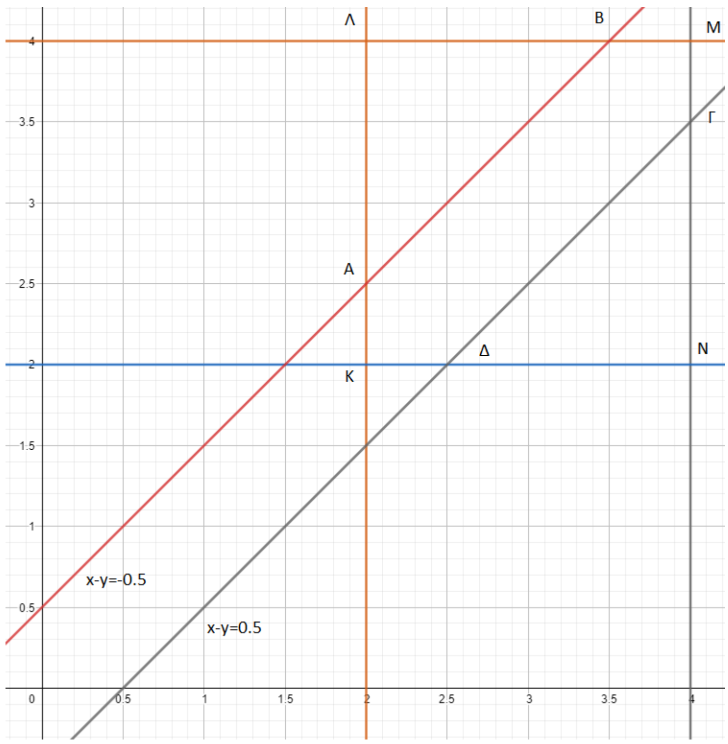
Σωστή απάντηση η Β.

4. Δύο φίλοι συμφωνούν να συναντηθούν μεταξύ 2 μ.μ. και 4 μ.μ. σε μία καφετέρια, αλλά ο καθένας από αυτούς θα περιμένει 30 λεπτά τον καθυστερημένο και εάν δεν εμφανιστεί, θα φύγει. Η πιθανότητα οι δύο φίλοι να συναντηθούν είναι:

38.25%
43.75%
51.25%
55.75%

ΛΥΣΗ:

Έστω x η χρονική στιγμή που φτάνει ο πρώτος και y η χρονική στιγμή που φτάνει ο δεύτερος. Για να συναντηθούν θα πρέπει $|x – y| < 0,5 \Rightarrow -0,5 < x – y < 0,5 \Rightarrow x – y > -0,5$ και $x – y < 0,5$. Εάν παρουσιάσουμε όλα τα παραπάνω δεδομένα μας σε ένα καρτεσιανό σύστημα ορθογωνίων αξόνων, θα πάρουμε το παρακάτω σχήμα:



Η ζητούμενη πιθανότητα θα προκύψει εάν βρούμε το ποσοστό του εμβαδού του πολυγώνου (ΑΒΜΓΔΚ) στο τετράγωνο (ΚΛΜΝ). Έχουμε ότι (ΚΛΜΝ) = 2^2 = 4 , (ΑΛΒ) = $\frac{1}{2}$ x (ΑΛ) . (ΛΒ) = (0,5) x (4-2,5) x (3,5-2) = 1,125 και (ΓΝΔ) = $\frac{1}{2}$ x (ΓΝ) x (ΝΔ) = (0,5) x (3,5-2) x (4-2,5) = 1,125. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι

P = $\frac{4-2x(1{,}125)}{4}$ = 0,4375.

Σωστή απάντηση η Β.

5. Η διάμεσος του βάρους των μαθητών της τάξης Α, που περιλαμβάνει 25 μαθητές, είναι 40 κιλά. Η διάμεσος του βάρους των μαθητών της τάξης Β, που περιλαμβάνει 65 μαθητές, είναι 50 κιλά. Εάν 20 μαθητές εγκαταλείψουν την τάξη Β και ενταχθούν στην τάξη Α, τα διάμεσα βάρη της τάξης Α και της τάξης Β δεν αλλάζουν. Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός των μαθητών στην τάξη Α, που τώρα ζυγίζουν περισσότερο από 40 κιλά, αλλά λιγότερο από 50 κιλά;

12
17
22
23

ΛΥΣΗ:

Η τάξη Α έχει 12 μαθητές με βάρος μικρότερο των 40 κιλών, έναν μαθητή με βάρος 40 κιλά και 12 μαθητές με βάρος μεγαλύτερο των 40 κιλών. Η τάξη Β έχει 32 μαθητές με βάρος μικρότερο των 50 κιλών, έναν μαθητή με βάρος 50 κιλά και 32 μαθητές με βάρος μεγαλύτερο των 50 κιλών. Μεταφέρουμε 20 μαθητές από την τάξη Β στην τάξη Α. Επειδή η διάμεσος του βάρους των μαθητών της τάξης Β παρέμεινε αμετάβλητη, 10 μαθητές είχαν βάρος μικρότερο των 50 κιλών και 10 μαθητές είχαν βάρος μεγαλύτερο των 50 κιλών. Για να παραμείνει όμως και η διάμεσος του βάρους των μαθητών της τάξης Α αμετάβλητη, οι 10 μαθητές που ήρθαν είχαν βάρος και μικρότερο των 40 κιλών και οι άλλοι 10 είχαν βάρος μεγαλύτερο των 40 κιλών. Συνεπώς, μέγιστος αριθμός των μαθητών στην τάξη Α, που τώρα ζυγίζουν περισσότερο από 40 κιλά αλλά λιγότερο από 50 κιλά, θα πρέπει να είναι ο αρχικός αριθμός των 12 μαθητών.

Σωστή απάντηση η Α.

6. Σε ένα τουρνουά ποδοσφαίρου παίρνουν μέρος 25 ομάδες. Το 80% των ομάδων προκρίνεται στον ημιτελικό γύρο και το 40% από αυτές που προκρίνονται συμμετέχουν στον τελικό. Εάν διαλέξουμε μια ομάδα στην τύχη (για τις επιδόσεις των ομάδων δεν γνωρίζουμε τίποτα) και θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα:

Α «η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον ημιτελικό ή στον τελικό»,
Β: «η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον ημιτελικό, αλλά όχι στον τελικό»,
Γ: «η ομάδα που διαλέξαμε δεν προκρίνεται στον τελικό»,
Δ: «η ομάδα που διαλέξαμε δεν προκρίνεται στον ημιτελικό ή προκρίνεται στον τελικό»,
σε ποιο από τα παραπάνω ενδεχόμενα μας συμφέρει να στοιχηματίσουμε;

στο Α
στο Β
στο Γ
στο Δ

ΛΥΣΗ:

Θα βρούμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α, Β, Γ, Δ

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

Η «η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον ημιτελικό»,

Τ «η ομάδα που διαλέξαμε προκρίνεται στον τελικό».

Το Τ είναι υποσύνολο του Η, έτσι ισχύουν $H \cup T = H$ και $H \cap T = T$

Είναι $N(\Omega) = 25$ και $N(H) = \frac{80}{100} \cdot 25 = 20$,

άρα $P(H) = \frac{N(H)}{N(\Omega)} = \frac{20}{25} = 0{,}8$

Επίσης, είναι $N(T) = \frac{40}{100} \cdot N(H) = \frac{40}{100} \cdot 20 = 8$,

άρα $P(T) = \frac{N(T)}{N(\Omega)} = \frac{8}{25} = 0{,}32$

$P(A) = P(H \cup T) = P(H) = 0{,}8$

$P(B) = P(H - T) = P(H) - P(H \cap T) = P(H) - P(T) = 0{,}8 - 0{,}32 = 0{,}48$

$P(\Gamma) = P(T') = 1 - P(T) = 1 - 0{,}32 = 0{,}68$

$P(\Delta) = P(T \cup H') = P(T) + P(H') - P(T \cap H') =$

Όμως $P(T \cap H') = P(T - H) = 0$, γιατί για να προκριθεί μια ομάδα στον τελικό πρέπει να νικήσει στον ημιτελικό. Άρα

$P(\Delta) = P(T) + P(H') = P(T) + 1 - P(H) = 0{,}32 + 1 - 0{,}8 = 0{,}52$

Είναι $P(A) > P(\Gamma) > P(\Delta) > P(B)$, άρα συμφέρει να στοιχηματίσουμε στο ενδεχόμενο Α.

Σωστή απάντηση η Α.

7. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2. Ορίζουμε 10 σημεία στην ε_1 και 15 σημεία στην ε_2. Θεωρούμε τα τρίγωνα που ορίζουν τα σημεία αυτά. Εάν επιλέξουμε τυχαία ένα τέτοιο τρίγωνο, η πιθανότητα να έχει μια πλευρά του στην ε_2 είναι:

43,48%

57,97%

86,68%

60,87%

ΛΥΣΗ:

Τα 25 συνολικά σημεία σχηματίζουν $\binom{25}{3}$ τριάδες σημείων. Όμως $\binom{10}{3}$ τριάδες σημείων ανήκουν στην ε_1 και δεν σχηματίζουν τρίγωνα και $\binom{15}{3}$ τριάδες σημείων ανήκουν στην ε_2 και δεν σχηματίζουν τρίγωνα. Επομένως ο αριθμός των τριγώνων που ορίζουν τα σημεία είναι

$\binom{25}{3} - \binom{10}{3} - \binom{15}{3} = \frac{25!}{3!x22!} - \frac{10!}{3!x7!} - \frac{15!}{3!x12!} =$

$\frac{23x24x25}{6} - \frac{8x9x10}{6} - \frac{13x14x15}{6} = 2.300 - 120 - 455 = 1.725$

$N(\Omega) = 1.725$

Τα δύο σημεία της μιας πλευράς που ανήκει στην ε_2 μπορούν να επιλεγούν με $\binom{15}{2}$ τρόπους και της κορυφής του τριγώνου που ανήκει στην ε_1 με 10 τρόπους. Επομένως, υπάρχουν

$10 \text{ x} \binom{15}{2} = 10\text{x}\frac{15!}{2!x13!} = 10\text{x}\frac{14x15}{2} = 1.050$ τρίγωνα με μια πλευρά στην ε_2.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα p $\frac{1050}{1725} = \frac{14}{23} = 0{,}6087$

Σωστή απάντηση η Δ.

8. Εάν η μέση τιμή πέντε ακέραιων αριθμών είναι διπλάσια της διαμέσου δ με 0 < δ ≤ 5 και οι τέσσερις από αυτούς είναι οι 0, 1, 5, 21 η πιθανότητα ο πέμπτος αριθμός να ανήκει στο σύνολο Ω = {-23, -22, …, 23} είναι:

6,38%
2,13%
10,64%
4,26%

ΛΥΣΗ:
Έστω ότι ο πέμπτος αριθμός είναι ο α. Τότε $\overline{x} = \frac{0+1+5+21+a}{5} = \frac{27+a}{5}$.
Άρα $\overline{x} = \frac{27+a}{5} = 2\delta$
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- α < 0, τότε δ = 1 και $\overline{x} = 2, \frac{27+a}{5} = 2a = -17$, δεκτή
- 0 < α < 1, τότε δ = 1 και $\overline{x} = 2, \frac{27+a}{5} = 2a = -17$, απορρίπτεται
- 1 < α < 5, τότε δ = α και $\overline{x} = 2\alpha, \frac{27+a}{5} = 2\alpha a = 3$, δεκτή
- 5 < α < 21, τότε δ = 5 και $\overline{x} = 10, \frac{27+a}{5} = 10a = 23$, απορρίπτεται
- α > 21, τότε δ = 5 και $\overline{x} = 10, \frac{27+a}{5} = 10a = 23$, δεκτή

Τελικά α∈{-17, 3, 23}. Είναι N(A) = 3, N(Ω) = 47 και P(A) = 3/47 = 0,0638
Σωστή απάντηση η Α.

9. Το μέσο ύψος των μαθητών της Γ’ Λυκείου είναι $\overline{x}$ = 172cm και η τυπική απόκλιση των υψών είναι s = 7cm. Η κατανομή των μαθητών ως προς το ύψος είναι περίπου κανονική. Εάν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή της Γ’ Λυκείου, η πιθανότητα του ενδεχομένου Α = { το ύψος του μαθητή είναι μεταξύ 165cm και 193cm} είναι:

13,50%
15,85%
83,85%
47,50%

ΛΥΣΗ:
Η κατανομή του ύψους των μαθητών είναι κανονική. Επομένως:
στο διάστημα $(\overline{x} - s, \overline{x} + s)$ = (165, 179) βρίσκεται το 68% του δείγματος,
στο διάστημα $(\overline{x} - 2s, \overline{x} + 3s)$ = (158, 186) βρίσκεται το 95% του δείγματος,
στο διάστημα $(\overline{x} - 3s, \overline{x} + 3s)$ = (151, 193) βρίσκεται το 99,7% του δείγματος,
Τα ύψη από 165cm ως 193cm αντιστοιχούν στο διάστημα $\overline{x} + 3s$, στο οποίο βρίσκεται το $68 + \frac{99{,}7-68}{2} = 68 + 15{,}85 = 83{,}85\%$ των παρατηρήσεων του δείγματος. Έτσι, επιλέγοντας τυχαία έναν μαθητή, η πιθανότητα του ενδεχομένου Α είναι P(A) = 0,8385.
Σωστή απάντηση η Γ.

10. Πόσα υποσύνολα 5 στοιχείων του συνόλου Α = {1, 2, 3, …, 10} περιέχουν τουλάχιστον έναν περιττό αριθμό;

251
252
250
254

ΛΥΣΗ:
Από τα στοιχεία του συνόλου Α δημιουργούνται
$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\text{x}(10-5)!} = \frac{10!}{5!\text{x}5!}$ = 252 υποσύνολα με 5 στοιχεία.
Στο σύνολο Α = {1, 2, 3, …, 10} υπάρχουν 5 άρτιοι αριθμοί. Επομένως, υπάρχει μόνο ένα υποσύνολο 5 στοιχείων που δεν περιέχει τουλάχιστον έναν περιττό αριθμό.
Συνεπώς, υπάρχουν 252 – 1 = 251 σύνολα που περιέχουν τουλάχιστον έναν περιττό αριθμό.
Σωστή απάντηση η Α.

Εκδοχή 3

1. Ένας παίκτης επιλέγει τυχαία μία μπάλα από έναν σάκο που περιέχει πέντε μπάλες αριθμημένες με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5. Εάν ο αριθμός της μπάλας είναι άρτιος, ο παίκτης χάνει αμέσως το παιχνίδι. Εάν ο αριθμός της μπάλας είναι περιττός, ο παίκτης λαμβάνει αριθμό πόντων ίσο με τον αριθμό που φέρει η μπάλα. Στη συνέχεια, τοποθετεί την μπάλα στον σάκο και επιλέγει μία μπάλα ξανά. Σε κάθε επόμενο γύρο, ο παίκτης χάνει το παιχνίδι, εάν το σύνολο των πόντων, στο σύνολο των προσπαθειών του, γίνει άρτιο και κερδίζει άλλη μία προσπάθεια κάθε φορά που το σύνολο των πόντων παραμένει περιττό. Η πιθανότητα ο παίκτης να συγκεντρώσει ακριβώς 7 πόντους και να χάσει στην αμέσως επόμενη προσπάθεια είναι:

6,336%
0,036%
0,038%
0,043%

ΛΥΣΗ:
Σύνολο 7 μπορούμε να πάρουμε με τους εξής τρόπους: (1, 2, 2, 2), (1, 4, 2), (1, 2, 4), (3, 2, 2), (3, 4), (5, 2). Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει η πρώτη επιλογή μας να είναι περιττός αριθμός και οι επόμενες άρτιος.
Για να συγκεντρώσουμε 7 πόντους στον δεύτερο γύρο και να χάσουμε στον τρίτο, θα πρέπει να φέρουμε
(3, 4), (5, 2) και στην συνέχεια οποιονδήποτε περιττό αριθμό. Άρα $p_1 = \frac{6}{5^3}$.
Για να συγκεντρώσουμε 7 πόντους στον τρίτο γύρο και να χάσουμε στον τέταρτο, θα πρέπει να φέρουμε
(1, 4, 2), (1, 2, 4), (3, 2, 2) και στην συνέχεια οποιονδήποτε περιττό αριθμό. Άρα $p_2 = \frac{9}{5^4}$.
Για να συγκεντρώσουμε 7 πόντους στον τέταρτο γύρο και να χάσουμε στον πέμπτο, θα πρέπει να φέρουμε
(1, 2, 2, 2) και στην συνέχεια οποιονδήποτε περιττό αριθμό. Άρα $p_3 = \frac{3}{5^5}$.
Επομένως, $p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{198}{3125} = 0{,}06336$
Σωστή απάντηση η Α.

2. Έχουμε 30 νομίσματα, εκ των οποίων τα 20 είναι μη κανονικά. Από τα μη κανονικά νομίσματα, τα 15 φέρνουν πάντα την ένδειξη κορώνα, ενώ τα 5 φέρνουν πάντα την ένδειξη γράμματα. Εάν ρίξουμε και τα 30 νομίσματα ταυτόχρονα, η πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον 14 φορές γράμματα είναι:

0,6%
0,8%
1,1%
1,3%

ΛΥΣΗ:
Μπορούμε να αγνοήσουμε τα 15 νομίσματα που φέρνουν πάντα την ένδειξη κορώνα γιατί δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα του πειράματος μας. Έτσι μας απομένουν 15 νομίσματα εκ των οποίων τα 5 φέρνουν πάντα την ένδειξη Γράμματα. Άρα τελικά μας απομένουν 10 κανονικά νομίσματα. Για να φέρουμε τουλάχιστον 14 φορές την ένδειξη Γράμματα, και δεδομένου των 5 νομισμάτων που φέρνουν πάντα την ένδειξη Γράμματα, σημαίνει ότι θα πρέπει να φέρουμε 9 ή 10 φορές την ένδειξη Γράμματα στα 10 νομίσματα που θα ρίξουμε. Υπάρχει μόνο ένας δυνατός τρόπος να φέρουμε 10 φορές την ένδειξη Γράμματα και 10 δυνατοί τρόποι να φέρουμε 9 φορές την ένδειξη Γράμματα, εάν ρίξουμε τα 10 νομίσματα. Συνεπώς, έχουμε 11 δυνατούς τρόπους επιτυχίας στα 2^{10} δυνατά αποτελέσματα. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{11}{2^{10}}$= 0,011.
Σωστή απάντηση η Γ.

3. 12 μαθητές ενός σχολείου δανείστηκαν συνολικά 71 βιβλία από την βιβλιοθήκη του σχολείου τους. Έστω x_i ο αριθμός των βιβλίων που δανείστηκε ο i μαθητής. Εάν το εύρος των τιμών x_i είναι 5, ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ο αριθμός των μαθητών που δανείστηκαν 6 βιβλία να είναι:
I. 9
II. 10
III. 11

I
III
II και III
I και III

ΛΥΣΗ:
Έστω x_1, x_2, …., x_{12} ο αριθμός των βιβλίων που οι 12 μαθητές δανείστηκαν, τοποθετημένοι σε αύξουσα σειρά. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, $x_1 + x_2 + \ldots + x_{12} = 71$, με εύρος τιμών 5.
Έστω 11 μαθητές δανείστηκαν 6 βιβλία. Τότε $x_1 + 6 \cdot 11 = 71 \Rightarrow x_1 = 5$, με εύρος τιμών 6 – 5 = 1, που δεν είναι δυνατόν.
Έστω 10 μαθητές δανείστηκαν 6 βιβλία. Τότε $x_1 + 6 \cdot 10 + x_{12} = 71 \Rightarrow x_1 + x_{12} = 11 \Rightarrow x_1 + x_1 + 5 = 11 \Rightarrow x_1 = 3$. Άρα $x_1 = 3$ και $x_{12} = 8$, με εύρος 5, που είναι πιθανόν να ισχύει.
Έστω 9 μαθητές δανείστηκαν 6 βιβλία. Έχουμε 71 - 54 = 17 βιβλία για τα υπόλοιπα 3 άτομα. Αφού x_1 ο μικρότερος αριθμός βιβλίων, τότε $x_1 + 5$ ο μεγαλύτερος αριθμός βιβλίων που έχει δανειστεί το τελευταίο άτομο. Έστω y ο αριθμός των βιβλίων που έχει δανειστεί το τρίτο άτομο. Τότε $2x_1 + y = 12$. Το x_1 δεν μπορεί να έχει τιμή 7 ή τιμή μεγαλύτερη του 7, γιατί το y

θα ήταν αρνητικό. Εάν $x_1 = 5$, τότε $y = 2$ και $x_1 + 5 = 10$. Αλλά το εύρος θα ήταν 10 - 2 = 8 και όχι 5. Εάν $x_1 = 4$, τότε $y = 4$ και $x_1 + 5 = 9$, και το εύρος θα ήταν 9 - 4 = 5, που θα ήταν σωστό σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος.
Σωστή απάντηση η Β.

4. Έστω x ακέραιος τέτοιος ώστε $49 \leq x \leq 150$. Η πιθανότητα ο αριθμός $(x^3 - x)$ να είναι πολλαπλάσιο του 12 είναι:

25%
50%
75%
80%

ΛΥΣΗ:
Έστω Α το ενδεχόμενο «ο αριθμός $x^3 - x$ είναι πολλαπλάσιο του 12»
Ισχύει ότι $x^3 - x = (x-1)\cdot x\cdot(x+1)$. Το γινόμενο των τριών διαδοχικών ακεραίων είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3, άρα και του 6. Συνεπώς, για να είναι ο παραπάνω αριθμός πολλαπλάσιο του 12 θα πρέπει απλά να είναι πολλαπλάσιο του 4.
Οι τριάδες που δημιουργούνται είναι οι:
49, 50, 51
50, 51, 52
……………
148, 149, 150
Επομένως δημιουργούνται 148 – 49 + 1 = 100 τριάδες
Άρα $N(\Omega) = 100$

α) Έστω ότι ο x είναι περιττός, δηλαδή $x = 2κ+1$, κ ακέραιος.
Τότε $(x-1)\cdot x\cdot(x+1) = 2κ\cdot(2κ+1)\cdot(2κ+2) = 4κ\cdot(κ+1)\cdot(2κ+1) = 4\cdot ρ$.
Άρα έχουμε 50 περιττούς στο διάστημα [49, 150] που πληρούν τις προϋποθέσεις του προβλήματος μας.

β) Έστω ότι ο x είναι άρτιος, δηλαδή $x = 2κ$, κ ακέραιος.
Τότε ο $(x-1)\cdot x\cdot(x+1)$ είναι πολλαπλάσιο του 4, μόνο εάν ο ίδιος ο x είναι πολλαπλάσιο του 4.
Άρα έχουμε ακόμα 25 αριθμούς στο διάστημα [49, 150] που πληρούν τις προϋποθέσεις του προβλήματος μας.
Συνεπώς, $N(A) = 50 + 25 = 75$
Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{75}{100} = 0{,}75$.
Σωστή απάντηση η Γ.

5. Μια κριτική επιτροπή 12 ατόμων πρόκειται να επιλεγεί τυχαία από μια ομάδα 15 ατόμων, η οποία αποτελείται από 2/3 άνδρες. Η πιθανότητα τουλάχιστον τα 2/3 των ατόμων της κριτικής επιτροπής να είναι άνδρες είναι:

55,33%
66,75%
70,33%
73,63%

ΛΥΣΗ:

Στα 15 άτομα από τα οποία θα γίνει η επιλογή έχουμε 10 άνδρες και 5 γυναίκες. Στην κριτική επιτροπή που θα δημιουργήσουμε θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον 8 άνδρες και το πολύ 4 γυναίκες. Επομένως, εάν υπολογίσουμε την πιθανότητα να επιλέξουμε 5 γυναίκες και την αφαιρέσουμε από την μονάδα, θα έχω υπολογίσει την πιθανότητα στην επιτροπή να υπάρχουν το πολύ 4 γυναίκες. Η επιτροπή μπορεί να επιλεγεί κατά C(15, 12) = 455 τρόπους. Μπορούμε να επιλέξουμε 5 γυναίκες και 7 άνδρες κατά C(5, 5) x C(10,7) = 120 τρόπους.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι: $1 - \frac{120}{455} = 0{,}7363$

Σωστή απάντηση Δ.

6. Ένας καθηγητής συγκέντρωσε τους μαθητές δύο τμημάτων $Γ_1$ και $Γ_2$ της Γ΄ Λυκείου και τους εξέτασε σε ένα πρόβλημα. Οι μαθητές του $Γ_2$ είναι 28 και οι μαθητές του $Γ_1$, που έλυσαν το πρόβλημα, είναι 5. Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:
Α «μαθητής που έλυσε το πρόβλημα»,
Β «μαθητής του $Γ_1$ που δεν έλυσε το πρόβλημα».
Εάν P(A) = $\frac{1}{5}$ και P(B) = $\frac{9}{20}$, η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ «μαθητής του $Γ_2$ που δεν έλυσε το πρόβλημα» είναι:

15%
10%
35%
55%

ΛΥΣΗ:

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης, κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα με τον αριθμό των μαθητών του $Γ_1$ και του $Γ_2$ και τον αριθμό αυτών που έλυσαν ή δεν έλυσαν το πρόβλημα:

	Έλυσε το πρόβλημα	Δεν έλυσε το πρόβλημα	
$Γ_1$	5	x	**5 + x**
$Γ_2$	y	z	**y + z = 28**
	5 + y	**x + z**	**N(Ω) = x + y + z + 5 = x + 33**

Έχουμε
Α «μαθητής που έλυσε το πρόβλημα». Είναι N(A) = 5 + y, N(Ω) = x + 33.

P(A) = $\frac{N(A)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{5+y}{x+33} \Leftrightarrow 5y + 25 = x + 33 \Leftrightarrow 5y - x = 8$
(1)

Β «μαθητής του $Γ_1$ που δεν έλυσε το πρόβλημα». Είναι N(B) = x, N(Ω) = x + 33.

P(B) = $\frac{N(B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{9}{20} = \frac{x}{x+33} \Leftrightarrow 9x + 297 = 20x \Leftrightarrow x = 27$

Επομένως, N(Ω) = x + 33 = 27 + 33 = 60

Από την (1) προκύπτει ότι y = 7, άρα z = 21 και για το ενδεχόμενο
Γ «μαθητής του $Γ_2$ που δεν έλυσε το πρόβλημα», είναι N(Γ) = z = 21 και N(Ω) = 60.

Άρα,

P(Γ) = $\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{21}{60} = \frac{7}{20}$

Σωστή απάντηση η Γ.

7. Δύο ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Πάνω στην $ε_1$ υπάρχουν 6 σημεία και πάνω στην ευθεία $ε_2$ υπάρχουν 5 σημεία. Το πλήθος των διαφορετικών τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές σημεία που βρίσκονται στις ανωτέρω ευθείες είναι:

125
135
115
120

ΛΥΣΗ:
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
1. Μια κορυφή στην $ε_1$ και δύο κορυφές στην $ε_2$.
Επιλέγουμε ένα σημείο από την $ε_1$ που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 6 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς τους τρόπους επιλέγουμε δύο σημεία από την $ε_2$ που μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$ τρόπους.
Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή μπορούν να σχηματιστούν 6 · 10 = 60 τρίγωνα.
2. Μια κορυφή στην $ε_2$ και δύο κορυφές στην $ε_1$
Επιλέγουμε ένα σημείο από την $ε_2$ που μπορεί να πραγματοποιηθεί με 5 τρόπους. Για καθέναν από αυτούς τους τρόπους επιλέγουμε δύο σημεία από την $ε_1$ που μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$ τρόπους.
Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή μπορούν να σχηματιστούν 5 · 15 = 75 τρίγωνα

Από την αρχή του αθροίσματος έχουμε 60 + 75 = 135 τρίγωνα.
Σωστή απάντηση η Β.

8. Το άθροισμα όλων των πενταψήφιων θετικών ακέραιων που προκύπτουν από την αναδιάταξη των ψηφίων του αριθμού 12345 είναι:

3.999.960
4.000.000
5.999.960
7.566.300

ΛΥΣΗ:
Το πλήθος των αριθμών που έχουν τελευταίο ψηφίο τη μονάδα (1) είναι: 4! = 24, δηλαδή όσες είναι οι μεταθέσεις των τεσσάρων αριθμών που βρίσκονται στις τέσσερεις πρώτες θέσεις.
Υπάρχουν λοιπόν:
4!= 24 αριθμοί που τελειώνουν σε 1,
4!= 24 αριθμοί που τελειώνουν σε 2,
4!= 24 αριθμοί που τελειώνουν σε 3,
4!= 24 αριθμοί που τελειώνουν σε 4 και
4!= 24 αριθμοί που τελειώνουν σε 5.
Άρα το άθροισμα των μονάδων όλων των αριθμών που δημιουργούνται, είναι:
$24 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 24 \times 15 = 360$
Με ανάλογο τρόπο σκεπτόμενοι, συμπεραίνουμε ότι
το άθροισμα των δεκάδων όλων των αριθμών που δημιουργούνται, είναι:
$24 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 10 = 24 \times 15 \times 10 = 360 \times 10 = 3.600$

το άθροισμα των εκατοντάδων όλων των αριθμών που δημιουργούνται, είναι:
$24 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 100 = 24 \times 15 \times 100 = 360 \times 100 = 36.000$
το άθροισμα των χιλιάδων όλων των αριθμών που δημιουργούνται, είναι:
$24 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 1000 = 24 \times 15 \times 1000 = 360 \times 1000 = 360.000$
το άθροισμα των δεκάδων χιλιάδων όλων των αριθμών που δημιουργούνται, είναι:
$24 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \times 10000 = 24 \times 15 \times 10000 = 360 \times 10000 = 3.600.000$
Επομένως, το άθροισμα όλων αριθμών είναι
$360 \times (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 360 \times 11111 = 3.999.960$
Σωστή απάντηση η Α.

9. Ένα μη αμερόληπτο ζάρι είναι κατασκευασμένο έτσι, ώστε η πιθανότητα εμφάνισης κάθε αριθμού κ να είναι ανάλογη του κ με $κ \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Θεωρούμε το δείγμα 2α, 3α, 4α με $α \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α «η τυπική απόκλιση του παραπάνω δείγματος είναι μεγαλύτερη του $\frac{2\sqrt{6}}{3}$» είναι:

57,14%
71,43%
85,71%
42,86%

ΛΥΣΗ:

Θέτουμε $P(1) = \frac{P(2)}{2} = \cdots = \frac{P(6)}{6} = \lambda$
Επομένως, ισχύει P(1) = λ, P(2) = 2λ, …, P(6) = 6λ.
Σύμφωνα με τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας, πρέπει να ισχύει
$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Rightarrow λ + 2λ + 3λ + 4λ + 5λ + 6λ = 1 \Rightarrow$
$21λ = 1 \Rightarrow λ = \frac{1}{21}$
Έτσι, $P(1) = \frac{1}{21}$, $P(2) = \frac{2}{21}$, $P(3) = \frac{3}{21}$, $P(4) = \frac{4}{21}$, $P(5) = \frac{5}{21}$, $P(6) = \frac{6}{21}$
Η μέση τιμή του δείγματος είναι $\overline{x} = \frac{2a+3a+4a}{3} = 3α$
Η διακύμανση είναι $s^2 = \frac{(2a-3a)^2+(3a-3a)^2+(4a-3a)^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$
Και η τυπική απόκλιση είναι $s = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
Πρέπει $s > \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{a\sqrt{6}}{3} > \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow α > 2$
Όμως, $α \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, άρα α = 3 ή α = 4 ή α = 5 ή α = 6
$P(A) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{3}{21} + \frac{4}{21} + \frac{5}{21} + \frac{6}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7} = 0{,}8571$
Σωστή απάντηση η Γ.

10. Οι πιθανότητες P(A) και P(B) των ενδεχομένων Α και Β, αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου Ω, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 2P(A)x + P(A \cap B) = 0$. Εάν $P(A \cup B) = \frac{5}{9}$, η πιθανότητα $P(A' \cap B)$ είναι:

11,11%
22,22%
33,33%

44,44%

ΛΥΣΗ:

Έστω x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, τότε ισχύουν: $x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Οι P(A), P(B) είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 2P(A)x + P(A \cap B) = 0$, άρα

$P(A) + P(B) = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{2P(A)}{1} \Leftrightarrow P(A) + P(B) = 2P(A) \Leftrightarrow P(A) = P(B)$

Επίσης,

$P(A) \cdot P(B) = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{P(A \cap B)}{1} \Leftrightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \Leftrightarrow (P(A))^2 = P(A \cap B)$

Ισχύει

$P(A \cup B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 2P(A) - (P(A))^2 = \frac{5}{9} \Leftrightarrow (P(A))^2 - 2P(A) + \frac{5}{9} = 0.$

Η παραπάνω εξίσωση έχει δύο λύσεις: $P(A) = \frac{5}{3} > 1$, που απορρίπτεται, και $P(A) = \frac{1}{3}$

Επομένως, $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$

$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{9} = 0{,}2222$

Σωστή απάντηση η Β.

Ερωτήσεις 2ου τεστ

Πληροφορίες για να απαντήσετε τα ερωτήματα του 2ου τεστ θα βρείτε στην ιστοσελίδα της ΕΛΣΤΑΤ www.statistics.gr και στην ιστοσελίδα της Eurostat https://ec.europa.eu/eurostat. Μπορείτε να βρείτε οδηγίες για τη χρήση των δύο ιστοσελίδων στη διεύθυνση: https://www.statistics.gr/documents/20181/17885307/istoselida_ELSTAT_EUROSTAT_6os.pdf/f3f11638-b245-d08e-df7e-fe037bee13f9.
Οι τρεις εκδοχές είναι ίδιες σε αυτό το τεστ.

- Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), πόσοι ήταν οι θρησκευτικοί και πόσοι οι πολιτικοί γάμοι, κατά το έτος 2020;

26.152 και 26.953, αντίστοιχα
26.419 και 27.253, αντίστοιχα
23.010 και 24.418, αντίστοιχα
11.935 και 19.540, αντίστοιχα

https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SPO06/2020 (05. Γάμοι κατά Τυπικό Τέλεσης (1991 - 2020))

- Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), ποιο ήταν το μέσο ετήσιο ποσοστό ανεργίας στον νομό Αρκαδίας, κατά το έτος 2021;

7,1 %
14,2 %
16,9 %
15,3 %

https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SJO01/2021-Q4
(09. Μέσο ετήσιο ποσοστό ανεργίας κατά νομό (1ο Τρίμηνο 2004 - 4ο Τρίμηνο 2021)

- Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), ποιος ήταν ο δείκτης ολικής γονιμότητας, κατά το έτος 2018;

1,35
1,38
1,30
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/DKT75/-

- Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), το Ακαθάριστο Εθνικό Εισόδημα σε αγοραίες τιμές, κατά το έτος 2018, ανήλθε σε (τρέχουσες τιμές, εκατομμύρια €):

177.577
149.630
159.832
179.558

https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SEL24/- (Βασικά Μακρο-οικονομικά Μεγέθη (1995 - 2020)

- Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), ποιος ήταν ο εκτιμώμενος αριθμός μεταναστών, ηλικίας έως 19 ετών, που ήρθαν στην Ελλάδα, κατά το έτος 2020;

23.723
24.725
23.221
12.524

https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SPO15/2020
01. Εκτιμώμενοι εισερχόμενοι μετανάστες κατά φύλο, ομάδες ηλικιών και υπηκοότητα (2008 - 2020)

- Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποιο ήταν το ποσοστό νεαρών ενηλίκων, ηλικίας 18-34 ετών, που ζούσαν μαζί με τους γονείς τους: α) στην Ελλάδα και β) στην ΕΕ-27, κατά το έτος 2021;

72,9% και 48,4%, αντίστοιχα
70,2% και 49,4%, αντίστοιχα
49,4% και 72,9%, αντίστοιχα
72,9% και 49,4%, αντίστοιχα

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/ILC_LVPS08__custom_3573748/default/table?lang=en

- Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποια χώρα της ΕΕ-27 είχε τον χαμηλότερο μέσο ετήσιο Εναρμονισμένο Δείκτη Τιμών Καταναλωτή (ΕνΔΤΚ), κατά το έτος 2021;

Κύπρος
Γερμανία
Ελλάδα

Πορτογαλία

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tec00027/default/table?lang=en

- Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποιο ήταν το ποσοστό γεννήσεων εκτός γάμου, στη Γαλλία, κατά το έτος 2020;

62,2 %
60,4 %
61 %
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tps00018/default/table?lang=en

- Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποιος ήταν ο αριθμός των επισκεπτών στα μουσεία της Βουδαπέστης, κατά το έτος 2020;

1.232.159
1.230.490
1.330.490
1.229.220

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/URB_CTOUR__custom_3574931/default/table?lang=en

- Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποια χώρα της ΕΕ-27 είχε το υψηλότερο και ποια το χαμηλότερο κατά κεφαλήν ΑΕΠ (GDP per capita), σε Μονάδες Αγοραστικής Δύναμης-ΜΑΔ (PPS) (EU27_2020 = 100), κατά το έτος 2020;

Ελλάδα, Εσθονία αντίστοιχα
Λουξεμβούργο, Βουλγαρία αντίστοιχα
Βέλγιο, Μάλτα αντίστοιχα
Ολλανδία, Ελλάδα αντίστοιχα

https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tec00114/default/table?lang=en

Ερωτήσεις 3ου τεστ

Πληροφορίες για να απαντήσετε τα ερωτήματα του 3ου τεστ θα βρείτε στα infographics της ΕΛΣΤΑΤ https://www.statistics.gr/el/elstat-infographics και στο infographic της Eurostat «Shedding light on energy in the EU» https://ec.europa.eu/eurostat/cache/infographs/energy/index.html?lang=en, το οποίο διαθέτει αυτόματη μετάφραση και στα ελληνικά.
Οι τρεις εκδοχές είναι ίδιες σε αυτό το τεστ.

- Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, πόσες ήταν οι αφίξεις τουριστών σε κάμπινγκ στη Βόρεια Ελλάδα, κατά το έτος 2020;

93.374
487.099
83.875
29.324

https://www.statistics.gr/el/infographic-campsites-2020

- Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, ποια ήταν η μέση μηνιαία δαπάνη (για προϊόντα και υπηρεσίες) των νοικοκυριών στις αστικές και στις αγροτικές περιοχές της Χώρας, σε τρέχουσες τιμές, κατά το έτος 2020;

1.404€ και 1.085€, αντίστοιχα
1.567€ και 1.191€, αντίστοιχα
1.341€ και 1.200€, αντίστοιχα
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://www.statistics.gr/documents/20181/17500692/DT_eop_2021_GR.png/76f6a59a-1d39-b4ca-ba0e-46f26be523a2

- Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, σε ποια αλιεύματα σημειώθηκε η μεγαλύτερη μείωση στην αλιευθείσα ποσότητα, κατά το έτος 2020, σε σύγκριση με το προηγούμενο έτος;

Οστρακοειδή
Κεφαλόποδα
Ιχθύες
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://www.statistics.gr/el/infographic-sea-fishery-2020

- Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, ποιος ήταν ο κύκλος εργασιών (σε εκατομμύρια €) των επιχειρήσεων για παροχή: α) καταλύματος και β) υπηρεσιών εστίασης, κατά το έτος 2021;

5.176,1 και 5.136,8, αντίστοιχα
7.136,2 και 6.502,4, αντίστοιχα
118,3 και 25,8, αντίστοιχα
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://www.statistics.gr/documents/20181/17797321/epixeiriseis_KATAL_EST.png/03b2a989-5bec-3c5d-53cf-fc8fc31f9ada

- Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, πόσοι ήταν οι επισκέπτες με εισιτήριο στους αρχαιολογικούς χώρους της Χώρας, κατά το έτος 2021;

3.800.522
2.047.481
5.309.545
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

https://www.statistics.gr/documents/20181/17839744/DT_museum_2021_gr.png/1c0dab82-483e-3ae9-822e-5649f575bf90

- Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ σχετικά με την ανώτατη εκπαίδευση (πανεπιστημιακός και τεχνολογικός τομέας), ποια από τις παρακάτω σχολές είχε περισσότερους εγγεγραμμένους προπτυχιακούς φοιτητές, κατά το ακαδημαϊκό έτος 2019/2020;

Ιόνιο Πανεπιστήμιο
Πολυτεχνείο Κρήτης
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
Ακαδημίες Εμπορικού Ναυτικού

https://www.statistics.gr/documents/20181/17746731/DT_tritovathmia_21.png/58688c23-413a-7e94-13a4-604dc178389d

- Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Shedding light on energy in the EU», ποια χώρα της ΕΕ-27 είχε το μεγαλύτερο ποσοστό παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας από υδροηλεκτρικούς σταθμούς, σε σχέση με τη συνολική παραγόμενη ηλεκτρική ενέργειά της, κατά το έτος 2020;

Αυστρία
Λουξεμβούργο
Κροατία
Λετονία

https://ec.europa.eu/eurostat/cache/infographs/energy/bloc-3b.html?lang=en

- Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Shedding light on energy in the EU», ποια χώρα της ΕΕ-27 παρουσίασε τη μεγαλύτερη ποσοστιαία μείωση σε εκπομπές αερίων του θερμοκηπίου, κατά το έτος 2019, σε σύγκριση με το έτος 1990;

Λετονία
Ρουμανία
Εσθονία
Λιθουανία

https://ec.europa.eu/eurostat/cache/infographs/energy/bloc-4a.html?lang=en

- Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Shedding light on energy in the EU», σε τι ποσοστό ανήλθε η παραγόμενη εντός της ΕΕ-27 ενέργεια σε σχέση με τη συνολική διαθέσιμη ενέργεια στην ΕΕ-27, κατά το έτος 2020;

58%
60%
42%
40%

https://ec.europa.eu/eurostat/cache/infographs/energy/bloc-2a.html

- Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Shedding light on energy in the EU», σε ποια χώρα της ΕΕ-27 η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας είχε το μεγαλύτερο μερίδιο στη συνολική τελική κατανάλωση ενέργειας, κατά το έτος 2020;

Γαλλία
Κύπρος
Μάλτα
Σουηδία

https://ec.europa.eu/eurostat/cache/infographs/energy/bloc-3a.html?lang=en