Κατηγορία Α: Λύκεια

Ερωτήσεις 1ου τεστ

Στο πρώτο τεστ υπάρχουν τρεις εκδοχές, ίσης γνωστικής αξίας. Κατά την έναρξη, η εκδοχή που πρέπει να απαντηθεί από την ομάδα επιλέγεται αυτόματα από το σύστημα.

Εκδοχή 1

- Κάθε ένα από τα Κ κουτιά, $1 \leq K \leq 2022$, που είναι τοποθετημένα σε μια σειρά, περιέχει μία μόνο κόκκινη μπάλα, και το κάθε κουτί στην Κ θέση περιέχει Κ λευκές μπάλες. Η Ισαβέλλα ξεκινά από το πρώτο κουτί και τραβά διαδοχικά και τυχαία μία μόνο μπάλα από κάθε κουτί με τη σειρά. Σταματά όταν τραβήξει για πρώτη φορά μία κόκκινη μπάλα. Έστω P(n): η πιθανότητα να σταματήσει η Ισαβέλλα αφού τραβήξει ακριβώς n μπάλες. Η μικρότερη τιμή του n για την οποία P(n) < $\frac{1}{2022}$είναι:

39

41

45

51

Λύση

Από τα δεδομένα του προβλήματος γνωρίζουμε ότι το :

1ο κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και 1 λευκή (Λ) μπάλα

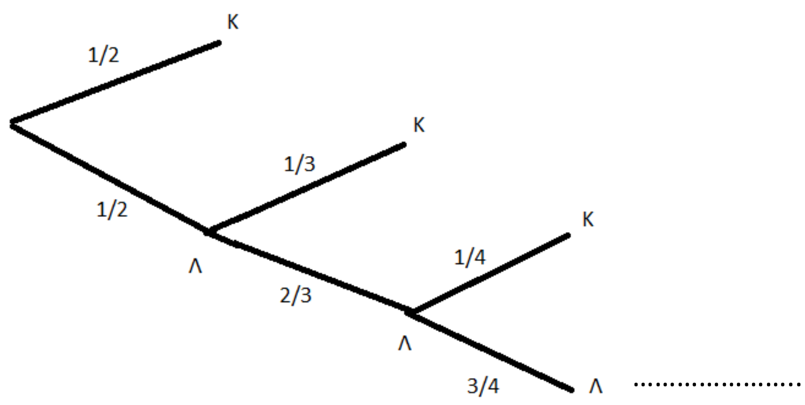
2ο κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και 2 λευκές (Λ) μπάλες

3ο κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και 3 λευκές (Λ) μπάλες

και γενικά το :

n-οστό κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και n λευκές (Λ) μπάλες.

Δημιουργούμε το παρακάτω δενδρόγραμμα



Εάν η Ισαβέλλα σταματήσει αφού τραβήξει μια μπάλα σημαίνει ότι έχει τραβήξει την κόκκινη μπάλα από το πρώτο κουτί. Άρα, P(1) = $\frac{1}{2}$ => P(1) = $\frac{1}{1}.\frac{1}{2}$

Εάν σταματήσει αφού τραβήξει δύο μπάλες σημαίνει ότι έχει τραβήξει την κόκκινη μπάλα από το δεύτερο κουτί και η μπάλα που τράβηξε από το πρώτο κουτί ήταν η λευκή.

Άρα, P(2) = $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}$

Εάν σταματήσει αφού τραβήξει τρεις μπάλες σημαίνει ότι έχει τραβήξει την κόκκινη μπάλα από το τρίτο κουτί και η μπάλα που τράβηξε από το πρώτο και το δεύτερο κουτί ήταν λευκή.

Άρα, P(3) = $\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}$=> P(3) = $\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$.

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία για την τέταρτη , πέμπτη , έκτη …… n-ιοστή μπάλα παρατηρούμε ότι

P(n) = $\frac{1}{n}.\frac{1}{n+1}$, n = 1, 2, 3, … , n μπάλες. Επομένως,

P(n) < $\frac{1}{2022}$ => $\frac{1}{n}.\frac{1}{n+1}$< $\frac{1}{2022}$ => n = 45.

- Από μία συνηθισμένη τράπουλα των 52 φύλλων, κρατούμε μόνο τις κάρτες με φιγούρες. Ανακατεύουμε τα φύλλα και ένας φίλος μας τραβάει 2 φύλλα τυχαία. Στη συνέχεια ανακοινώνει ότι ένα από αυτά τα φύλλα είναι Βασιλιάς ή Μπαστούνι. Η πιθανότητα να έχει τραβήξει δύο Βασιλιάδες είναι:

22,22%

27,27%

36,36%

46,15%

Λύση

Στις 12 φιγούρες που έχουμε κρατήσει υπάρχουν 4 Βασιλιάδες, 4 Βασίλισσες και 4 Βαλέδες.

Εάν ο φίλος μας κρατά έναν Βασιλιά, η πιθανότητα να κρατά τον πρώτο Βασιλιά είναι ένα.

Μας απομένουν έτσι 11 φύλλα μέσα στα οποία θα υπάρχουν 3 Βασιλιάδες. Η πιθανότητα το δεύτερο φύλλο να είναι Βασιλιάς θα είναι $\frac{\binom{3}{1}}{\binom{11}{1}}$ = $\frac{3}{11}$.

Εάν ο φίλος μας κρατά στο χέρι του Μπαστούνι δεν γνωρίζουμε εάν αυτό είναι Βασιλιάς. Οπότε η πιθανότητα είναι $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}}$ = $\frac{1}{11}$.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\frac{3}{11}+\frac{1}{11}=\frac{4}{11}$= 0,3636 , δηλ. 36,36%.

- Σε ένα σχολείο 120 μαθητών, αριθμημένων ο καθένας με έναν αριθμό από 1 έως 120, όλοι οι αριθμημένοι μαθητές με έναν άρτιο αριθμό επιλέγουν Φυσική, όλοι οι μαθητές που ο αριθμός τους διαιρείται με 5 επιλέγουν Χημεία και εκείνοι των οποίων ο αριθμός διαιρείται με 7 επιλέγουν Μαθηματικά. Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή. Η πιθανότητα να μην έχει επιλέξει κανένα από τα τρία μαθήματα είναι:

15,33%

21,67%

27,67%

34,17%

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που έχουν επιλέξει Φυσική είναι $\left[\frac{120}{2}\right]$= 60 , ο αριθμός αυτών που έχουν επιλέξει Χημεία είναι $\left[\frac{120}{5}\right]$ = 24, ενώ ο αριθμός των μαθητών που έχουν επιλέξει Μαθηματικά είναι $\left[\frac{120}{7}\right]$ = 17.

Έχουν επιλέξει και τα τρία μαθήματα $\left[\frac{120}{ΕΚΠ(2,5,7)}\right]$= 1 μαθητής, Φυσική και Χημεία $\left[\frac{120}{ΕΚΠ(2,5)}\right]$-1 = 11 μαθητές, Φυσική και Μαθηματικά $\left[\frac{120}{ΕΚΠ(2,7)}\right]$-1 = 7 μαθητές και έχουν επιλέξει Χημεία και Μαθηματικά $\left[\frac{120}{ΕΚΠ(5,7)}\right]$-1 = 2 μαθητές.

Ο αριθμός των μαθητών που έχει επιλέξει μόνο Φυσική είναι 60 – 11 – 7 – 1 = 41, ο αριθμός αυτών που έχει επιλέξει μόνο Χημεία είναι 24 – 11 – 2 – 1 = 10, ενώ αυτών που έχουν επιλέξει μόνο Μαθηματικά είναι 17 – 7 – 2 – 1 = 7.

Συνολικά, ο αριθμός των μαθητών που έχει επιλέξει τουλάχιστον ένα μάθημα είναι 1 + 11 + 7 + 2 + 41 + 10 + 7 = 79. Συνεπώς, ο αριθμός των μαθητών που δεν έχουν επιλέξει κανένα μάθημα είναι 120 – 79 = 41 , και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{41}{120}$= 0,3417, δηλ. 34,17% .

- Οι ηγέτες των χωρών της G7 συνέρχονται στη Ρώμη και στέκονται στη σειρά για να τραβήξουν μερικές φωτογραφίες για τον ημερήσιο τύπο. Ποια είναι η πιθανότητα η φωτογραφία που θα επιλέξουν τυχαία οι συντάκτες μιας εφημερίδας για δημοσίευση την επόμενη ημέρα να είναι αυτή στην οποία ο Εμμανουέλ Μακρόν δεν στέκεται δίπλα στον Τζάστιν Τρυντώ;

71,43%

76,67%

77,23%

79,81%

Λύση

Έστω ότι βάζουμε μαζί σαν μια μονάδα τον Εμμανουέλ Μακρόν και τον Τζάστιν Τρυντώ. Τότε έχουμε τους έξι ηγέτες 1, 2 ,3, 4, 5, { Εμμανουέλ Μακρόν και Τζάστιν Τρυντώ} που μπορούν να σταθούν στη σειρά κατά 6! τρόπους, ενώ η διάδα { Εμμανουέλ Μακρόν και Τζάστιν Τρυντώ} μπορεί να σταθεί στη σειρά κατά 2! τρόπους. Άρα ο συνολικός αριθμός διατάξεων είναι (6!).(2!). Οι ηγέτες της G7 μπορούν να σταθούν στη σειρά κατά 7! τρόπους. Αφού όμως η διάδα { Εμμανουέλ Μακρόν και Τζάστιν Τρυντώ} δεν θα πρέπει να σταθεί ο ένας δίπλα στον άλλον, μας μένουν 7! - (6!).(2!) τρόποι. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{7!-(6!).(2!)}{7!}$= 1 - $\frac{(6!).(2!)}{7!}$= 1 - $\frac{2}{7}$= 0,7143, δηλ. 71,43%.

- n σημεία, όπου το n είναι άρτιος αριθμός μεγαλύτερος από 3, τοποθετούνται σε ίσες αποστάσεις στην περιφέρεια ενός κύκλου, Αν 3 από τα n αυτά σημεία επιλεγούν τυχαία, η πιθανότητα να αποτελούν κορυφές ορθογώνιου τριγώνου είναι:

$\frac{3}{n}$

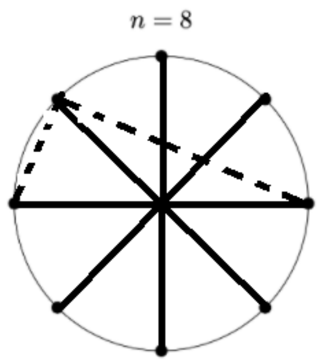
$\boldsymbol{\frac{3}{n-1}}$

$\frac{3}{n+1}$

$\frac{3}{n+2}$

Λύση

Παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα για π.χ n = 8, βλέπουμε ότι δύο σημεία θα πρέπει να είναι πάντα αντιδιαμετρικά.



Αφού τα n σημεία τοποθετούνται σε ίσες αποστάσεις στην περιφέρεια ενός κύκλου, ο αριθμός των διαγωνίων θα είναι $\frac{n}{2}$. Η επιλογή μιας διαγωνίου από τις $\frac{n}{2}$μπορεί να γίνει με $\binom{n/2}{1}$= $\frac{n}{2}$τρόπους. Για να δημιουργήσουμε τις άλλες δύο πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου, θα πρέπει να επιλέξουμε ένα σημείο από τα υπόλοιπα (n – 2) σημεία. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{n-2}{1}$= n – 2 τρόπους. Άρα συνολικά ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να δημιουργηθεί με $\frac{n(n-2)}{2}$επιλογές.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\frac{n(n-2)}{2}}{\binom{n}{3}}$= $\frac{3}{n-1}$.

- Μια ερευνήτρια έχει καθορίσει ότι απαιτείται n αριθμός απαντήσεων σε μια έρευνα για να είναι τα αποτελέσματά της έγκυρα. Εάν το p% των ερωτηθέντων δεν απαντήσει στην έρευνα, πόσα άτομα, συναρτήσει του n και p, πρέπει να ερωτήσει η ερευνήτρια για να συγκεντρώσει το διπλάσιο του ελάχιστου απαιτούμενου αριθμού απαντήσεων;

$\frac{100n}{15-2p}$

$\frac{50n}{15-4p}$

$\mathbf{\frac{200n}{100-p}}$

$\frac{5p}{20-4n}$

Λύση

Έστω x : ο αριθμός των ατόμων που πρέπει να ερωτηθούν. Εάν το p% των ατόμων δεν απαντήσει στην έρευνα, τότε ο αριθμός αυτών που απάντησε είναι x – x . $\frac{p}{100}$.

Άρα θα πρέπει

x – x.$\frac{p}{100}$= 2n => x = $\frac{200n}{100-p}$

- Ένας καθηγητής μαθηματικών δίνει διαδοχικούς διαφορετικούς πρώτους αριθμούς, ξεκινώντας από τον μικρότερο εκτός του 1, σε κάθε μαθητή της τάξης του. Αν επιλέξει δύο μαθητές τυχαία, η πιθανότητα το άθροισμα των αριθμών τους να μην είναι άρτιος αριθμός είναι μικρότερη από 0,1. Ο μικρότερος δυνατός αριθμός μαθητών στην τάξη του είναι:

21

27

31

33

Λύση

Ας παρατηρήσουμε προσεκτικά τους 10 πρώτους αριθμούς εκτός του 1. Αυτοί είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Παρατηρούμε ότι εάν επιλέξουμε δύο από αυτούς το άθροισμα τους δεν είναι άρτιος αριθμός μόνο εάν ο ένας από τους δύο που θα επιλεγεί είναι το 2. Σε κάθε άλλη περίπτωση το άθροισμα τους είναι πάντα άρτιος αριθμός.

Έστω n : ο αριθμός των μαθητών της τάξης. Ο καθηγητής μπορεί να επιλέξει από $\binom{n}{2}$ζευγάρια μαθητών και να αθροίσει τους αριθμούς τους, αλλά μόνο εάν ο ένας από τους δύο αριθμούς του ζευγαριού είναι το 2 δεν θα δίνει ως άθροισμα άρτιο αριθμό. Τα ζευγάρια με έναν από τους δύο αριθμούς το 2 είναι (n – 1). Συνεπώς θα πρέπει $\frac{n-1}{\binom{n}{2}}$< 0,1 => n = 21

- Οι αριθμοί x και y επιλέγονται ανεξάρτητα και τυχαία από το διάστημα [0, 1]. Η πιθανότητα οι αριθμοί x, y και 1 να είναι μήκη πλευρών ενός αμβλυγώνιου τριγώνου είναι:

28,54%

32.67%

36,75%

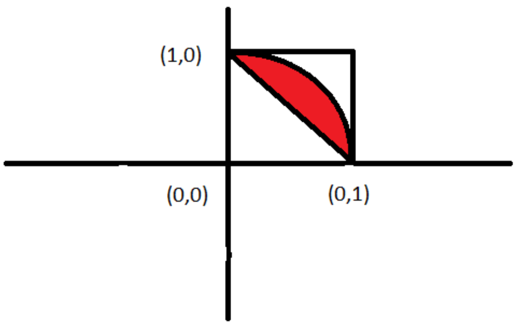
41,33%

Λύση

Αφού το x και το y βρίσκονται στο διάστημα [0,1], η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι 1. Πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις :

$x^2 + y^2 < 1$ (ιδιότητα αμβλυγώνιων τριγώνων) και $x + y > 1$ (τριγωνική ανισότητα).

Παρατηρώντας το παρακάτω γεωμετρικό σχήμα



διακρίνουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι το εμβαδόν της κόκκινης γραμμοσκιασμένης περιοχής, δηλ. είναι $\frac{\pi}{4}$- $\frac{1}{2}$= 0,2854 ή 28,54%.

- Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες 1 cm και 2 cm. Δύο σημεία του εξωτερικού κύκλου επιλέγονται τυχαία. Η πιθανότητα η χορδή που ενώνει τα δύο αυτά σημεία να τέμνει τον εσωτερικό κύκλο είναι:

1/6

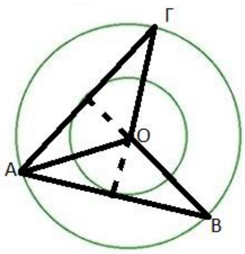
1/4

1/3

1/2

Λύση

Δημιουργούμε το παρακάτω γεωμετρικό σχήμα



Έστω ένα τυχαίο σημείο Α στην περιφέρεια του κύκλου (Ο , 2 cm). Από το σχήμα παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε χορδή θα τέμνει τον εσωτερικό κύκλο εάν εκτός από το σημείο Α επιλέξουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο του κυρτού τόξου ΒΓ

Γνωρίζουμε ότι $B\hat{O}\Gamma = 2\, B\hat{A}\Gamma$ και επειδή ημ ($O\hat{A}\Gamma$) = $\frac{1}{2}$=> $O\hat{A}\Gamma = 30^0$.

Άρα $B\hat{A}\Gamma = 60^0$ και $B\hat{O}\Gamma = 120^0$. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$

- Σε μια εταιρεία το 60% των εργαζομένων κερδίζει ετησίως λιγότερα από 50.000 ευρώ, το 60% των εργαζομένων κερδίζει ετησίως περισσότερα από 40.000 ευρώ, το 11% των εργαζομένων κερδίζει 43.000 ευρώ ετησίως και το 5% των εργαζομένων κερδίζει 49.000 ευρώ ετησίως. Η διάμεση τιμή των μισθών των εργαζομένων της εταιρείας είναι:

43.000

45.500

46.000

49.000

Λύση

Για ευκολία μας θεωρούμε ότι στην εταιρία εργάζονται 100 άτομα. Εάν θέσουμε τους μισθούς τους σε αύξουσα σειρά η διάμεσος θα είναι ($\alpha_{50} + \alpha_{51}$)/2.

Από τα δεδομένα του προβλήματος είναι φανερό ότι $40.000 < \alpha_{41} \leq \alpha_{42} \leq \ldots \leq \alpha_{60} < 50.000$. Άρα η ζητούμενη διάμεσος είναι μικρότερη του 50.000. Γνωρίζουμε επίσης ότι 11 εργαζόμενοι κερδίζουν 43.000 Ευρώ και ότι 5 εργαζόμενοι κερδίζουν 49.000 Ευρώ. Συνεπώς, οι μισθοί 4 μόνο εργαζόμενων παραμένουν άγνωστοι σε εμάς, αλλά όμως σίγουρα θα ανήκουν, είτε στο διάστημα 40.000 – 43.000, είτε στο διάστημα 43.000 – 49.000, είτε στο διάστημα 49.000 – 50.000. Παρατηρώντας όμως προσεκτικά την σειρά $40.000 < \alpha_{41} \leq \alpha_{42} \leq \ldots \leq \alpha_{60} < 50.000$ είναι φανερό ότι $\alpha_{50} = 43.000$ Ευρώ και $α_{51}$ = 43.000 Ευρώ. Άρα η διάμεση τιμή των μισθών των εργαζομένων της εταιρίας είναι 43.000 Ευρώ.

Εκδοχή 2

- Ο Γιάννης έχει στην τσέπη του έξι νομίσματα των 2 ευρώ, πέντε νομίσματα του 1 ευρώ και δέκα νομίσματα των 50 σεντ. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός νομισμάτων που θα πρέπει ο Γιάννης να τραβήξει από την τσέπη του, ώστε να είναι τουλάχιστον 95% σίγουρος ότι θα τραβήξει τουλάχιστον ένα νόμισμα των 2 ευρώ;

4

7

8

10

Λύση

Ισχύει ότι p(ένα τουλάχιστον νόμισμα των 2 ευρώ) = 1$-p(κανένα\ νόμισμα\ των\ 2ευρώ) \geq$ 0.95 , δηλ. $p(κανένα\ νόμισμα\ των\ 2ευρώ) \leq 0.05$

Άρα, $\frac{\binom{15}{n}}{\binom{21}{n}} \leq 0.05$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι για n = 7 η παράσταση γίνεται $\frac{6435}{116280}$= 0,05534 ενώ για n = 8 η παράσταση γίνεται $\frac{6435}{203490}$= 0,0316. Συνεπώς, n = 8

- n σημεία, όπου το n είναι άρτιος αριθμός μεγαλύτερος από 3, τοποθετούνται σε ίσες αποστάσεις στην περιφέρεια ενός κύκλου. Αν 3 από τα n αυτά σημεία επιλεγούν τυχαία, η πιθανότητα αυτά να αποτελούν κορυφές ορθογώνιου τριγώνου είναι:

$\frac{3}{n}$

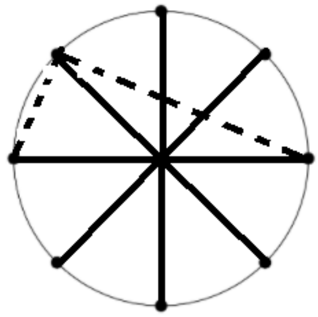
$\boldsymbol{\frac{3}{n-1}}$

$\frac{3}{n+1}$

$\frac{3}{n+2}$

Λύση

Παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα για π.χ n = 8, βλέπουμε ότι δύο σημεία θα πρέπει να είναι πάντα αντιδιαμετρικά.



Αφού τα n σημεία τοποθετούνται σε ίσες αποστάσεις στην περιφέρεια ενός κύκλου, ο αριθμός των διαγωνίων θα είναι $\frac{n}{2}$. Η επιλογή μιας διαγωνίου από τις $\frac{n}{2}$μπορεί να γίνει με $\binom{n/2}{1}$= $\frac{n}{2}$τρόπους. Για να δημιουργήσουμε τις άλλες δύο πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου, θα πρέπει να επιλέξουμε ένα σημείο από τα υπόλοιπα (n – 2) σημεία. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{n-2}{1}$= n – 2 τρόπους. Άρα συνολικά ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να δημιουργηθεί με $\frac{n(n-2)}{2}$επιλογές.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\frac{n(n-2)}{2}}{\binom{n}{3}}$= $\frac{3}{n-1}$.

- Ένας οδηγός λεωφορείου παρκάρει το λεωφορείο του σε ένα χώρο 20 θέσεων στάθμευσης στη σειρά, κατά τη διάρκεια του μεσημεριανού διαλείμματός του. Υπάρχουν συνολικά 20 λεωφορεία σταθμευμένα στον χώρο στάθμευσης, συμπεριλαμβανομένου του δικού του, και το λεωφορείο του δεν είναι σταθμευμένο στις δύο άκρες του χώρου στάθμευσης. Μετά την επιστροφή από το μεσημεριανό του γεύμα, διαπιστώνει ότι υπάρχουν μόνο 12 λεωφορεία πλέον σταθμευμένα στον χώρο, συμπεριλαμβανομένου του δικού του. Αν κανένα άλλο λεωφορείο δεν έφτασε στον χώρο κατά τη διάρκεια του μεσημεριανού διαλείμματός του, ποια είναι η πιθανότητα να έχουν φύγει τα δύο λεωφορεία που ήταν σταθμευμένα εκατέρωθεν του λεωφορείου του;

16,37%

17,67%

18,33%

21,67%

Λύση

Από τα δεδομένα του προβλήματος καταλαβαίνουμε ότι από το χώρο στάθμευσης έφυγαν 8 λεωφορεία. Αυτά μπορεί να φύγουν με $\binom{19}{8}$τρόπους (19 γιατί το 20ο λεωφορείο είναι το δικό μας). Οι τρόποι για να έχουν φύγει τα δύο λεωφορεία που ήταν σταθμευμένα εκατέρωθεν του λεωφορείου του και έξι ακόμα λεωφορεία από τα υπόλοιπα 17 είναι $\binom{17}{6}$.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\binom{17}{6}}{\binom{19}{8}}$= $\frac{28}{171}$= 0,1637 ή 16,37%.

- Ένας παίκτης τυχερών παιχνιδιών κρατά ένα κανονικό ζάρι στο αριστερό του χέρι και δύο κανονικά ζάρια στο δεξί του χέρι. Ρίχνει ταυτόχρονα τα ζάρια. Η πιθανότητα η ένδειξη του ζαριού από το αριστερό του χέρι να είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών από το δεξί του χέρι είναι:

3,33%

9,26%

11,67%

12,49%

Λύση

Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα

Ένα ζάρι	**Άθροισμα 2ου και 3ου ζαριού**	**Περιπτώσεις**	**Σύνολο**
3 , 4 , 5 , 6	2	[1,1]	4 . (1) = 4
4 , 5 , 6	3	[1,2] , [2,1]	3 . (2) = 6
5 , 6	4	[2,2] , [1,3] , [3,1]	2 . (3) = 6
6	5	[1,4] , [4,1] , [2,3] , [3,2]	1 . (4) = 4

Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{20}{6^3}$= $\frac{5}{54}$ή 9,26%

- Κάθε ένα από τα K κουτιά, $1 \leq K \leq 2022$, που είναι τοποθετημένα σε μια σειρά, περιέχει μία μόνο κόκκινη μπάλα, και το κάθε κουτί στην K θέση περιέχει K λευκές μπάλες. Η Ισαβέλλα ξεκινά από το πρώτο κουτί και τραβά διαδοχικά και τυχαία μία μόνο μπάλα από κάθε κουτί με τη σειρά. Σταματά όταν τραβήξει για πρώτη φορά μία κόκκινη μπάλα. Έστω P(n) : η πιθανότητα να σταματήσει η Ισαβέλλα αφού τραβήξει ακριβώς n μπάλες. Η μικρότερη τιμή του n για την οποία P(n)<$\frac{1}{2022}$ είναι:

39

41

45

51

Λύση

Από τα δεδομένα του προβλήματος γνωρίζουμε ότι το :

1ο κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και 1 λευκή (Λ) μπάλα

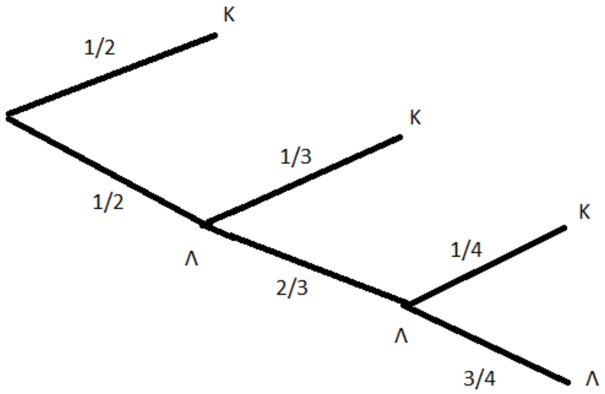
2ο κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και 2 λευκές (Λ) μπάλες

3ο κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και 3 λευκές (Λ) μπάλες

και γενικά το :

n-οστό κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και n λευκές (Λ) μπάλες.

Δημιουργούμε το παρακάτω δενδρόγραμμα



……………………..

Εάν η Ισαβέλλα σταματήσει αφού τραβήξει μια μπάλα σημαίνει ότι έχει τραβήξει την κόκκινη μπάλα από το πρώτο κουτί. Άρα, $P(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(1) = \frac{1}{1}.\frac{1}{2}$

Εάν σταματήσει αφού τραβήξει δύο μπάλες σημαίνει ότι έχει τραβήξει την κόκκινη μπάλα από το δεύτερο κουτί και η μπάλα που τράβηξε από το πρώτο κουτί ήταν η λευκή.

Άρα, $P(2) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}$

Εάν σταματήσει αφού τραβήξει τρεις μπάλες σημαίνει ότι έχει τραβήξει την κόκκινη μπάλα από το τρίτο κουτί και η μπάλα που τράβηξε από το πρώτο και το δεύτερο κουτί ήταν λευκή.

Άρα, $P(3) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4} \Rightarrow P(3) = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}.$

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία για την τέταρτη , πέμπτη , έκτη …… n-ιοστή μπάλα παρατηρούμε ότι

$P(n) = \frac{1}{n}.\frac{1}{n+1}$, n = 1, 2, 3, … , n μπάλες. Επομένως,

$P(n) < \frac{1}{2022} \Rightarrow \frac{1}{n}.\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2022} \Rightarrow n = 45.$

- Σε ένα διαγώνισμα 15 ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής, κάθε μαθητής παίρνει 3 μονάδες για κάθε σωστή απάντηση, του αφαιρείται 1 μονάδα για κάθε λανθασμένη απάντηση, ενώ δε βαθμολογείται για κάθε ερώτηση που δεν απαντά. Εάν ένας μαθητής απαντήσει τουλάχιστον σε μία ερώτηση του διαγωνίσματος, η πιθανότητα να συγκεντρώσει θετική βαθμολογία είναι:

72,41%

83,25%

86,74%

91,75%

Λύση

Η ελάχιστη βαθμολογία που μπορεί να συγκεντρώσει ο μαθητής εάν απαντήσει όλες τις ερωτήσεις λάθος είναι (-1) . 15 = -15, ενώ η μέγιστη εάν απαντήσει όλες τις ερωτήσεις σωστά είναι 3 . 15 = 45.
Οι βαθμολογίες που δεν μπορούν να επιτευχθούν από τον μαθητή είναι 40, 43 και 44 γιατί
α. Για να πάρει 40 = 14 . 3 + 2 . (-1), δηλ. θα πρέπει να απαντήσει τουλάχιστον 16 ερωτήσεις που είναι αδύνατον.
β. Για να πάρει 43 = 15 . 3 + 2 . (-1), δηλ. θα πρέπει να απαντήσει τουλάχιστον 17 ερωτήσεις που είναι αδύνατον.
γ. Για να πάρει 44 = 15 . 3 + 1 . (-1), δηλ. θα πρέπει να απαντήσει τουλάχιστον 16 ερωτήσεις που είναι αδύνατον.
Άρα ο αριθμός των διακριτών βαθμολογιών που μπορεί να συγκεντρώσει ο μαθητής είναι (45 - (-15) + 1 – 3 = 58 (Πρέπει να προσθέσουμε 1 γιατί μπορεί να πάρει και τη βαθμολογία 0).
Συνεπώς από τις θετικές βαθμολογίες μπορεί να να συγκεντρώσει 45 – 3 = 42 θετικές βαθμολογίες και η ζητούμενη πιθανότητα είναι 42/58, δηλ. 0,7241 ή 72,41%.

- Μια ερευνήτρια έχει καθορίσει ότι απαιτείται n αριθμός απαντήσεων σε μια έρευνα για να είναι τα αποτελέσματά της έγκυρα. Εάν το p% των ερωτηθέντων δεν απαντήσει στην έρευνα, πόσα άτομα, συναρτήσει του n και p, πρέπει να ερωτήσει η ερευνήτρια για να συγκεντρώσει το διπλάσιο του ελάχιστου απαιτούμενου αριθμού απαντήσεων;

$\frac{100n}{15-2p}$

$\frac{50n}{15-4p}$

$\boldsymbol{\frac{200n}{100-p}}$

$\frac{5p}{20-4n}$

Λύση

Έστω x : ο αριθμός των ατόμων που πρέπει να ερωτηθούν. Εάν το p% των ατόμων δεν απαντήσει στην έρευνα, τότε ο αριθμός αυτών που απάντησε είναι $x - x \cdot \frac{p}{100}$.

Άρα θα πρέπει

$x - x.\frac{p}{100} = 2n \Rightarrow x = \frac{200n}{100-p}$

- Οι αριθμοί x και y επιλέγονται ανεξάρτητα και τυχαία από το διάστημα [0, 1]. Η πιθανότητα οι αριθμοί x, y και 1 να είναι μήκη πλευρών ενός αμβλυγώνιου τριγώνου είναι:

28,54%

32.67%

36,75%

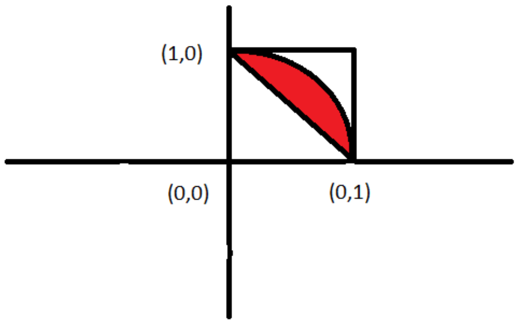
41,33%

Λύση

Αφού το x και το y βρίσκονται στο διάστημα [0,1], η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι 1. Πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις :

$x^2 + y^2 < 1$ (ιδιότητα αμβλυγώνιων τριγώνων) και $x + y > 1$ (τριγωνική ανισότητα).

Παρατηρώντας το παρακάτω γεωμετρικό σχήμα



διακρίνουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι το εμβαδόν της κόκκινης γραμμοσκιασμένης περιοχής, δηλ. είναι $\frac{\pi}{4}$- $\frac{1}{2}$= 0,2854 ή 28,54%.

- Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες 1 cm και 2 cm. Δύο σημεία του εξωτερικού κύκλου επιλέγονται τυχαία. Η πιθανότητα η χορδή που ενώνει τα δύο αυτά σημεία να τέμνει τον εσωτερικό κύκλο είναι:

1/6

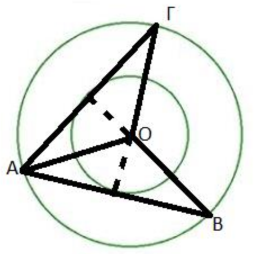
1/4

1/3

1/2

Λύση

Δημιουργούμε το παρακάτω γεωμετρικό σχήμα



Έστω ένα τυχαίο σημείο Α στην περιφέρεια του κύκλου (Ο , 2 cm). Από το σχήμα παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε χορδή θα τέμνει τον εσωτερικό κύκλο εάν εκτός από το σημείο Α επιλέξουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο του κυρτού τόξου ΒΓ

Γνωρίζουμε ότι $B\hat{O}\Gamma$= 2 $B\hat{A}\Gamma$ και επειδή ημ ($O\hat{A}\Gamma$) = $\frac{1}{2}$=> $O\hat{A}\Gamma$= 30^0.

Άρα $B\hat{A}\Gamma$= 60^0 και $B\hat{O}\Gamma$= 120^0. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\frac{120^0}{360^0}$= $\frac{1}{3}$

- Δίνονται 101 παρατηρήσεις x_1 , x_2 ,…, x_{101} , οι οποίες είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους, με μέση τιμή μ και διάμεσο δ.

i. Αν όλες οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες της μέσης τιμής αυξηθούν κατά μία μονάδα και όλες οι παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες από τη μέση τιμή ελαττωθούν κατά μία μονάδα, τότε η μέση τιμή μ παραμένει σταθερή.

ii. Αν όλες οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες της διαμέσου αυξηθούν κατά μία μονάδα και όλες οι παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες από τη διάμεσο ελαττωθούν κατά μία μονάδα, τότε η μέση τιμή μ παραμένει σταθερή.

iii. Αν όλες οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες της διαμέσου αυξηθούν κατά μία μονάδα και όλες οι παρατηρήσεις που είναι μεγαλύτερες από τη διάμεσο ελαττωθούν κατά μία μονάδα, τότε η διάμεσος δ παραμένει σταθερή.

Από τις παραπάνω προτάσεις σωστή(ές) είναι:

Η i και η ii

Η ii και η iii

Μόνο η ii

Καμία

Λύση

Η πρόταση i θα ήταν σωστή μόνο εάν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από τη μέση τιμή είναι ίσο με το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες από τη μέση τιμή. Κάτι τέτοιο όμως γενικά δεν ισχύει, άρα η πρόταση i είναι λάθος.

Η πρόταση ii είναι σωστή γιατί το άθροισμα των παρατηρήσεων παραμένει σταθερό, οπότε και η μέση τιμή μ παραμένει σταθερή.

Έστω οι τρεις μεσαίες τιμές είναι οι 9,5 , 10 , 14. Τότε η διάμεσος είναι δ = 10. Μετά τις αλλαγές οι τιμές θα γίνουν 10 , 10,5 , 13 , και η διάμεσος θα είναι δ = 10,5. Άρα η πρόταση iii είναι λάθος.

Επομένως, η μόνη σωστή πρόταση είναι η ii.

Εκδοχή 3

- Έστω n τρίγωνα, σε καθένα των οποίων το άθροισμα του μήκους της βάσης και του μήκους του ύψους είναι 10 μονάδες. Ο μέσος όρος των μηκών των βάσεων των n τριγώνων είναι 8 μονάδες και η τυπική απόκλιση αυτών είναι 1 μονάδα. Ο μέσος όρος των εμβαδών όλων των τριγώνων είναι:

5,8 μονάδες

6,2 μονάδες

7,1 μονάδες

7,5 μονάδες

Λύση

Έστω ότι a_i , i = 1 , 2 , …. , n τα μήκη των βάσεων των n τριγώνων και b_i , i = 1 , 2 , …. , n τα μήκη των υψών τους αντίστοιχα. Ισχύει ότι $a_i + b_i = 10$, i = 1 , 2 , …. , n και ότι $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 8n$ και $[(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)/n] - 8^2 = 1^2 \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 65n$.

Ο μέσος όρος των εμβαδών των n τριγώνων θα είναι

$[(a_1b_1/2) + (a_2b_2/2) + \ldots + (a_nb_n/2)] / n = \{ [a_1(10-a_1) + [a_2(10-a_2)] + \ldots + [a_n(10-a_n)] \} / 2n =$

$[10 (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)] / 2n = (80n – 65n) / 2n = 7,5$

- Μια ερευνήτρια έχει καθορίσει ότι απαιτείται n αριθμός απαντήσεων σε μια έρευνα για να είναι τα αποτελέσματά της έγκυρα. Εάν το p% των ερωτηθέντων δεν απαντήσει στην έρευνα, πόσα άτομα, συναρτήσει του n και p, πρέπει να ερωτήσει η ερευνήτρια για να συγκεντρώσει το διπλάσιο του ελάχιστου απαιτούμενου αριθμού απαντήσεων;

$\frac{100n}{15-2p}$

$\frac{50n}{15-4p}$

$\mathbf{\frac{200n}{100-p}}$

$\frac{5p}{20-4n}$

Λύση

Έστω x : ο αριθμός των ατόμων που πρέπει να ερωτηθούν. Εάν το p% των ατόμων δεν απαντήσει στην έρευνα, τότε ο αριθμός αυτών που απάντησε είναι $x - x \cdot \frac{p}{100}$.

Άρα θα πρέπει

$x - x.\frac{p}{100} = 2n \Rightarrow x = \frac{200n}{100-p}$

- Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι, δίνονται σε έναν διαγωνιζόμενο τρία κλειδιά, καθένα από τα οποία ανοίγει ακριβώς ένα από τα τρία πανομοιότυπα κουτιά. Το πρώτο κουτί περιέχει 1 ευρώ, το δεύτερο κουτί περιέχει 100 ευρώ και το τρίτο κουτί περιέχει 1.000 ευρώ. Ο διαγωνιζόμενος τοποθετεί τυχαία κάθε κλειδί σε ένα από τα κουτιά και κερδίζει το χρηματικό ποσό που περιέχεται σε κάθε κουτί που ανοίγει. Η πιθανότητα ο διαγωνιζόμενος να κερδίσει περισσότερα από 1.000 ευρώ είναι:

1/9

1/8

1/6

1/3

Λύση

Έστω το κουτί Α που ανοίγει από το κλειδί Α είναι αυτό που περιέχει το 1 Ευρώ, το κουτί Β που ανοίγει από το κλειδί Β είναι αυτό που περιέχει 100 Ευρώ και το κουτί Γ που ανοίγει από το κλειδί Γ είναι αυτό που περιέχει 1.000 Ευρώ. Για να κερδίσει ο διαγωνιζόμενος περισσότερα από 1.000 Ευρώ, θα πρέπει να πετύχει τον εξής συνδυασμό :

Το κλειδί Α να πάει στο κουτί Α, το κλειδί Β να πάει στο κουτί Β και το κλειδί Γ να πάει στο κουτί Γ.

Το σύνολο όλων των περιπτώσεων είναι 3 ! = 6 και η ζητούμενη πιθανότητα είναι 1/6.

- Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες 1 cm και 2 cm. Δύο σημεία του εξωτερικού κύκλου επιλέγονται τυχαία. Η πιθανότητα η χορδή που ενώνει τα δύο αυτά σημεία να τέμνει τον εσωτερικό κύκλο είναι:

1/6

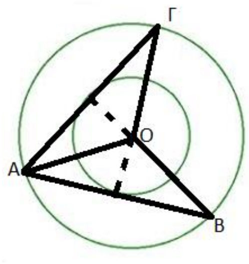
1/4

1/3

1/2

Λύση

Δημιουργούμε το παρακάτω γεωμετρικό σχήμα



Έστω ένα τυχαίο σημείο Α στην περιφέρεια του κύκλου (Ο , 2 cm). Από το σχήμα παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε χορδή θα τέμνει τον εσωτερικό κύκλο εάν εκτός από το σημείο Α επιλέξουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο του κυρτού τόξου ΒΓ

Γνωρίζουμε ότι $B\hat{O}\Gamma$= 2 $B\hat{A}\Gamma$και επειδή ημ ($O\hat{A}\Gamma$) = $\frac{1}{2}$=> $O\hat{A}\Gamma$= 30^0.

Άρα $B\hat{A}\Gamma$= 60^0 και $B\hat{O}\Gamma$= 120^0. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\frac{120}{360}$= $\frac{1}{3}$

- Ένα πρόγραμμα υπολογιστή “δημιουργεί” μονοψήφιους θετικούς ακεραίους μεταξύ του 0 και του 9 με μια τυχαία διαδικασία σύμφωνα με την οποία η πιθανότητα δημιουργίας οποιουδήποτε θετικού ακεραίου να είναι ανάλογη με το αντίστροφο του παραπάνω ακεραίου προσαυξημένου κατά μία μονάδα. Εάν είναι δυνατή η “δημιουργία” όλων των θετικών ακεραίων μεταξύ του 0 και του 9, τότε η πιθανότητα δημιουργίας ενός περιττού πρώτου θετικού ακεραίου εκτός του 1 είναι μεταξύ:

0 και 1/6

1/6 και 1/3

1/3 και 1/2

1/2 και 2/3

Λύση

Με τα δεδομένα του προβλήματος θα πρέπει p(i) = $\frac{c}{i+1}$, i = 1 , 2 , … , 8. (Το 0 δεν είναι θετικός ακέραιος και το 9 δεν περιλαμβάνεται).

Ισχύει όμως ότι $\sum p\,(i)$= 1, δηλ. c ($\frac{1}{2}$+ $\frac{1}{3}$+ … + $\frac{1}{9}$) = 1 . Επειδή μας ζητά να βρούμε περίπου την πιθανότητα υπολογίζουμε τα κλάσματα έστω στα δύο δεκαδικά ψηφία. Έτσι έχουμε

c (0,5 + 0,33 + 0,25 + 0,2 + 0,17 + 0,14 + 0,13 + 0,11) = 1 => c (1,83) = 1 => c = $\frac{1}{1,83}$

Η ζητούμενη πιθανότητα (θέλουμε περιττό αριθμό) είναι p(3) + p(5) + p(7) = (0,25 + 0,17 + 0,13) / 1,83 = 0,3

που βρίσκεται μεταξύ του 1/6 και του 1/3.

- Οι αριθμοί x και y επιλέγονται ανεξάρτητα και τυχαία από το διάστημα [0, 1]. Η πιθανότητα οι αριθμοί x, y και 1 να είναι μήκη πλευρών ενός αμβλυγώνιου τριγώνου είναι:

28,54%

32.67%

36,75%

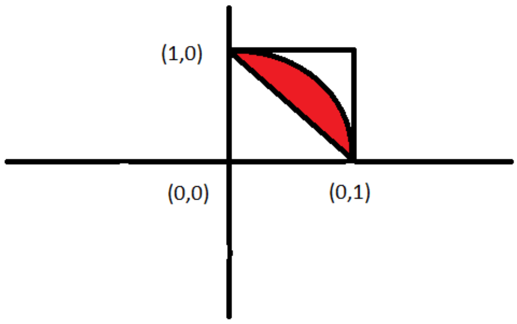
41,33%

<u>Λύση</u>

Αφού το x και το y βρίσκονται στο διάστημα [0,1], η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου είναι 1. Πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις :

$x^2 + y^2 < 1$ (ιδιότητα αμβλυγώνιων τριγώνων) και $x + y > 1$ (τριγωνική ανισότητα).

Παρατηρώντας το παρακάτω γεωμετρικό σχήμα



διακρίνουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι το εμβαδόν της κόκκινης γραμμοσκιασμένης περιοχής, δηλ. είναι $\frac{\pi}{4}$- $\frac{1}{2}$= 0,2854 ή 28,54%.

- Το ένα πέμπτο των ηλεκτρικών λαμπτήρων που παράγονται από ένα συγκεκριμένο εργοστάσιο είναι ελαττωματικοί. Τα 4/5 των ελαττωματικών λαμπτήρων απορρίπτονται και το 1/20 των μη ελαττωματικών λαμπτήρων απορρίπτονται κατά λάθος. Εάν αγοράσουμε έναν ηλεκτρικό λαμπτήρα που δεν απορρίφθηκε, η πιθανότητα να είναι ελαττωματικός είναι:

2%

5%

9%

10%

Λύση

Για ευκολία μας έστω ότι στο πείραμα μας έχουμε 100 λαμπτήρες.

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος εύκολα δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα.

	Απορρίπτεται	**Δεν απορρίπτεται**	**Σύνολο**
Ελαττωματικός	16	4	20
Μη ελαττωματικός	4	76	80
Σύνολο	20	80	100

Η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\frac{4}{80}$= 0,05 , δηλ. 5%.

- n σημεία τοποθετούνται σε ίσες αποστάσεις στην περιφέρεια ενός κύκλου, όπου το n είναι άρτιος αριθμός μεγαλύτερος από 3. Αν 3 από τα n αυτά σημεία επιλεγούν τυχαία, η πιθανότητα αυτά να αποτελούν κορυφές ορθογώνιου τριγώνου είναι:

$\frac{3}{n}$

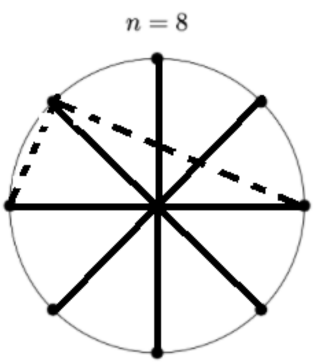
$\boldsymbol{\frac{3}{n-1}}$

$\frac{3}{n+1}$

$\frac{3}{n+2}$

Λύση

Παρατηρώντας το παρακάτω σχήμα για π.χ. n = 8, βλέπουμε ότι δύο σημεία θα πρέπει να είναι πάντα αντιδιαμετρικά.



Αφού τα n σημεία τοποθετούνται σε ίσες αποστάσεις στην περιφέρεια ενός κύκλου, ο αριθμός των διαγωνίων θα είναι $\frac{n}{2}$. Η επιλογή μιας διαγωνίου από τις $\frac{n}{2}$μπορεί να γίνει με $\binom{n/2}{1}$= $\frac{n}{2}$τρόπους. Για να δημιουργήσουμε τις άλλες δύο πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου, θα πρέπει να επιλέξουμε ένα σημείο από τα υπόλοιπα (n – 2) σημεία. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{n-2}{1}$= n – 2 τρόπους. Άρα συνολικά ένα ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να δημιουργηθεί με $\frac{n(n-2)}{2}$επιλογές.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\frac{n(n-2)}{2}}{\binom{n}{3}}$= $\frac{3}{n-1}$.

- Κάθε ένα από τα Κ κουτιά, $1 \leq K \leq 2022$, που είναι τοποθετημένα σε μια σειρά, περιέχει μία μόνο κόκκινη μπάλα, και το κάθε κουτί στην Κ θέση περιέχει Κ λευκές μπάλες. Η Ισαβέλλα ξεκινά από το πρώτο κουτί και τραβά διαδοχικά και τυχαία μία μόνο μπάλα από κάθε κουτί με τη σειρά. Σταματά όταν τραβήξει για πρώτη φορά μία κόκκινη μπάλα. Έστω P(n) : η πιθανότητα να σταματήσει η Ισαβέλλα αφού τραβήξει ακριβώς n μπάλες. Η μικρότερη τιμή του n για την οποία P(n)<$\frac{1}{2022}$ είναι:

39

41

45

51

<u>Λύση</u>

Από τα δεδομένα του προβλήματος γνωρίζουμε ότι το :

1ο κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και 1 λευκή (Λ) μπάλα

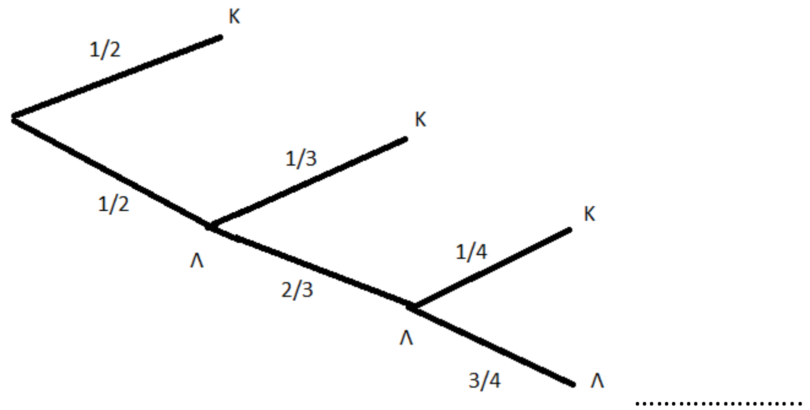
2ο κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και 2 λευκές (Λ) μπάλες

3ο κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και 3 λευκές (Λ) μπάλες

και γενικά το :

n-οστό κουτί περιέχει 1 κόκκινη (Κ) μπάλα και n λευκές (Λ) μπάλες.

Δημιουργούμε το παρακάτω δενδρόγραμμα



Εάν η Ισαβέλλα σταματήσει αφού τραβήξει μια μπάλα σημαίνει ότι έχει τραβήξει την κόκκινη μπάλα από το πρώτο κουτί. Άρα, $P(1) = \frac{1}{2}$ => $P(1) = \frac{1}{1}.\frac{1}{2}$

Εάν σταματήσει αφού τραβήξει δύο μπάλες σημαίνει ότι έχει τραβήξει την κόκκινη μπάλα από το δεύτερο κουτί και η μπάλα που τράβηξε από το πρώτο κουτί ήταν η λευκή.

Άρα, $P(2) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}$

Εάν σταματήσει αφού τραβήξει τρεις μπάλες σημαίνει ότι έχει τραβήξει την κόκκινη μπάλα από το τρίτο κουτί και η μπάλα που τράβηξε από το πρώτο και το δεύτερο κουτί ήταν λευκή.

Άρα, $P(3) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}$=> $P(3) = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}$.

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία για την τέταρτη , πέμπτη , έκτη …… n-ιοστή μπάλα παρατηρούμε ότι

$P(n) = \frac{1}{n}.\frac{1}{n+1}$, n = 1, 2, 3, … , n μπάλες. Επομένως,

$P(n) < \frac{1}{2022}$ => $\frac{1}{n}.\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2022}$ => n = 45.

- Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει περίμετρο 19cm και υποτείνουσα μεγαλύτερη από 9 cm. Η πιθανότητα το εμβαδόν του να είναι θετικός ακέραιος μεγαλύτερος των 5 cm^2 είναι:

0%

25%

75%

100%

Λύση

Έστω a , b οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου και c η υποτείνουσα αυτού. Ισχύουν οι σχέσεις a + b + c = 19 με c > 9 , και a + b > c . Επίσης, θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

9 < c < 9,5 (αν c > 9,5 , τότε a + b < c) , και 9,5 < a + b < 10 (αν a + b > 10 , τότε c < 9). Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε ότι

$81 < c^2 < 90{,}25$ και $90{,}25 < a^2 + b^2 + 2ab < 100$ => $90{,}25 < c^2 + 2ab < 100$. Άρα 0 < 2ab < 19 =>

0 < ab/2 < 19/4 => 0 < Εμβαδόν < 4,75 . Η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0%.

Ερωτήσεις 2ου τεστ

Πληροφορίες για να απαντήσετε τα ερωτήματα του 2ου τεστ θα βρείτε στην ιστοσελίδα της ΕΛΣΤΑΤ www.statistics.gr και στην ιστοσελίδα της Eurostat https://ec.europa.eu/eurostat.

Μπορείτε να βρείτε οδηγίες για τη χρήση των δύο ιστοσελίδων στη διεύθυνση: https://www.statistics.gr/documents/20181/17368215/istoselida_ELSTAT_EUROSTAT_5os.pdf/d96e83ef-8865-7931-9372-b6ff96c6c16d.
Οι τρεις εκδοχές είναι ίδιες σε αυτό το τεστ.

1. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), πόσοι ήταν οι θρησκευτικοί και πόσοι οι πολιτικοί γάμοι το έτος 2018;
26.419 θρησκευτικοί και 27.253 πολιτικοί
26.152 θρησκευτικοί και 26.953 πολιτικοί
23.278 θρησκευτικοί και 23.059 πολιτικοί
23.010 θρησκευτικοί και 24.418 πολιτικοί
https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SPO06/2019

05. Γάμοι κατά Τυπικό Τέλεσης (1991 - 2019)

2. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2020, πόσες ήταν οι αφίξεις αλλοδαπών στα καταλύματα ξενοδοχειακού τύπου του Δήμου Χερσονήσου (Περιφερειακή Ενότητα Ηρακλείου);
480.549
405.742
1.201.049
492.468
https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/STO12/2020

10. Αφίξεις πελατών στα καταλύματα ξενοδοχειακού τύπου (πλην κάμπινγκ), κατά Περιφερειακή Ενότητα και Δήμο

3. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), ποιος ήταν ο δείκτης ολικής γονιμότητας, κατά το έτος 2016;
1,35
1,38
1,32
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις
http://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/DKT75/-
Χρονοσειρά - Δείκτης Ολικής Γονιμότητας (1950 - 2018)

4. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ) από την Απογραφή Πληθυσμού-Κατοικιών 2011, πόσοι ήταν οι μόνιμοι κάτοικοι του Δήμου Ναυπακτίας, της Περιφερειακής Ενότητας Αιτωλοακαρνανίας, με υπηκοότητα από χώρες της ΕΕ;
1.163
65
232
1.560
https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SAM03/-
πίνακας B09 Μόνιμος Πληθυσμός κατά ομάδες υπηκοοτήτων Δήμοι

5. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2019, η συνολική χρηματοδότηση για τις δαπάνες υγείας ως ποσοστό (%) του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (ΑΕΠ) στην Ελλάδα ανήλθε στο:
8,21%
7,97%
7,96%
7,84%
Δελτίο Τύπου: https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SHE35/-

6. Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, για το έτος 2019, ποια χώρα της ΕΕ κατείχε την πρώτη θέση στις βιολογικές καλλιέργειες ως ποσοστό (%) χρησιμοποιούμενης γεωργικής έκτασης;
Γαλλία
Εσθονία
Αυστρία
Ελλάδα
https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/sdg_02_40/default/table?lang=en

7. Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποια από τις παρακάτω χώρες παρουσιάζει τον υψηλότερο «ελάχιστο μηνιαίο μισθό», κατά το δεύτερο εξάμηνο του 2021;
Βέλγιο
Λουξεμβούργο
Ολλανδία
Ιρλανδία
https://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=earn_mw_cur&lang=en
Monthly minimum wages - bi-annual data

8. Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, κατά το έτος 2020, πόσες άδειες παραμονής εκδόθηκαν στην Ελλάδα;
35.751
19.821
42.348
35.571
https://appsso.eurostat.ec.europa.eu/nui/show.do?dataset=migr_resfas&lang=en
First permits by reason, age, sex and citizenship (update 01-12-2021)

9 .Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποιο ήταν το ποσοστό συμμετοχής του τομέα των Τεχνολογιών Πληροφοριών και Επικοινωνιών (ΤΠΕ) στο Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν (ΑΕΠ) της Ιταλίας, κατά το έτος 2019;
3,38%
3,35%
5,25%
5,41%
https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tin00074/default/table?lang=en

Percentage of the ICT sector in GDP (isoc_bde15ag)

10. Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποια από τις παρακάτω χώρες είχε το υψηλότερο ποσοστό (%) νοικοκυριών με ευρυζωνική πρόσβαση κατά το έτος 2021;
Βέλγιο
Ελλάδα
Κύπρος
Πορτογαλία
https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tin00073/default/table?lang=en
Household internet connection - Percentage of households - Households with broadband access
Απάντηση: Κύπρος 93%, Βέλγιο 92%, Ελλάδα 85%, Πορτογαλία 84%

Ερωτήσεις 3ου τεστ

Πληροφορίες για να απαντήσετε τα ερωτήματα του 3ου τεστ θα βρείτε στα infographics της ΕΛΣΤΑΤ https://www.statistics.gr/el/elstat-infographics και στο infographic της Eurostat "Η δημογραφία της Ευρώπης-έκδοση 2021" https://www.statistics.gr/demography/index.html, το οποίο έχει μεταφραστεί και είναι διαθέσιμο στα ελληνικά.
Οι τρεις εκδοχές είναι ίδιες σε αυτό το τεστ.

1. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, κατά το έτος 2018~~,~~ ποια Μεγάλη Γεωγραφική Περιοχή (NUTS 1) της Ελλάδος, είχε τις περισσότερες διανυκτερεύσεις αλλοδαπών σε Καταλύματα Ξενοδοχειακού Τύπου;
Αττική
Βόρεια Ελλάδα
Κεντρική Ελλάδα
Νησιά Αιγαίου, Κρήτη
https://www.statistics.gr/el/infographic-hotel-arrivals-2020

2. Σύμφωνα με το infographic της ΕΛΣΤΑΤ «Ενάρξεις και λήξεις λειτουργίας επιχειρήσεων», κατά το έτος 2020, πόσες επιχειρήσεις άλλαξαν οικονομική δραστηριότητα;
11.476
12.204
84.122
14.847
https://www.statistics.gr/el/infographic-start-close-ent-19-20

3. Σύμφωνα με το infographic της ΕΛΣΤΑΤ «Δημογραφία Επιχειρήσεων, 2019», κατά το έτος 2019, πόσες ήταν οι ενεργές επιχειρήσεις στην Ελλάδα;
737.852
4.116.903
358.267
984.001
https://www.statistics.gr/el/infographic-business-demography-2019

4. Σύμφωνα με το infographic της ΕΛΣΤΑΤ, κατά το έτος 2018, ποιος ήταν ο αριθμός πόσοι ήταν οι απασχολούμενοι στις ιχθυοκαλλιέργειες;
3.694

3.964
4.260
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις
https://www.statistics.gr/el/infographic-aquaculture-2018

5. Σύμφωνα με το infographic της ΕΛΣΤΑΤ «Έρευνα Οικοδομικής Δραστηριότητας, 2020», πόσες άδειες ιδιωτικής οικοδομικής δραστηριότητας εκδόθηκαν κατά το έτος 2019;
17.229
16.240
13.785
18.747
https://www.statistics.gr/el/infographic-building-activity-2020

6. Σύμφωνα με το infographic της ΕΛΣΤΑΤ «Χρήση Ηλεκτρονικού Εμπορίου και Τεχνολογιών Πληροφόρησης και Επικοινωνίας στις Επιχειρήσεις, 2018» τι ποσοστό επιχειρήσεων έκανε χρήση τρισδιάστατης εκτύπωσης για πρωτότυπα ή μοντέλα για πώληση;
44,7%
51,1%
34,7%
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις
https://www.statistics.gr/el/infographic-ict-enterprises-2018

7. Σύμφωνα με τα infographic της ΕΛΣΤΑΤ «Μένουμε σπίτι», τι ποσοστό του πληθυσμού είχε πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία κατά το έτος 2019;
76,5%
76,1%
78,5%
68,1%
https://www.statistics.gr/el/infographic-menoume-spiti-2

8. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Η δημογραφία της Ευρώπης, 2021», ποια ήταν η μέση ηλικία της μητέρας κατά τη γέννηση του πρώτου παιδιού στην Ελλάδα κατά το έτος 2018;
29,3 έτη
30,4 έτη
30,3 έτη
30,6 έτη
https://ec.europa.eu/eurostat/cache/digpub/demography/index.html?lang=en
Fertility rate
https://ec.europa.eu/eurostat/cache/digpub/demography/bloc-2b.html?lang=en

9. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Η δημογραφία της Ευρώπης, 2021», ποιο είναι το ποσοστό (%) του πληθυσμού ηλικίας 15 έως 19 ετών που διέμενε κυρίως σε αστικές περιοχές στην Ελλάδα, επί του συνολικού πληθυσμού, κατά το έτος 2020;
5,0%
4,8%
5,1%
4,5%

https://ec.europa.eu/eurostat/cache/digpub/demography/index.html?lang=en

Distribution of population in urban-rural regions by age group, 2020 – predominantly urban regions

https://ec.europa.eu/eurostat/cache/digpub/demography/bloc-3d.html?lang=en

10. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Η δημογραφία της Ευρώπης, 2021», ποιο είναι το ποσοστό (%) του πληθυσμού ηλικίας κάτω των 15 ετών, στην ΕΕ, την Ελλάδα και την Κύπρο, επί του συνολικού πληθυσμού, κατά το έτος 2020;

ΕΕ 5,2% Ελλάδα 5,1% Κύπρος 5,6%

ΕΕ 15,2% Ελλάδα 14,3% Κύπρος 16,1%

ΕΕ 15,1% Ελλάδα 14,3% Κύπρος 16,0%

ΕΕ 15,2% Ελλάδα16,2% Κύπρος 16,3%

https://ec.europa.eu/eurostat/cache/digpub/demography/index.html?lang=en

Population by age group – Population aged less than 15 years

https://ec.europa.eu/eurostat/cache/digpub/demography/bloc-1c.html?lang=en