4ος Πανελλήνιος Διαγωνισμός στη Στατιστική (2021)

Θέματα 1ου Τεστ (Ασκήσεις και Λύσεις)

Κατηγορία: Γενικά και Επαγγελματικά Λύκεια

ΕΚΔΟΧΗ 1

1. Σε μια πολυκατοικία υπάρχουν διαμερίσματα ενός υπνοδωματίου και διαμερίσματα δύο υπνοδωματίων. Γνωρίζουμε ότι η ετήσια μέση τιμή ενοικίασης όλων των διαμερισμάτων της πολυκατοικίας είναι 5.600 Ευρώ μεγαλύτερη από την ετήσια μέση τιμή ενοικίασης όλων των διαμερισμάτων ενός υπνοδωματίου και 10.400 Ευρώ μικρότερη από την ετήσια μέση τιμή ενοικίασης όλων των διαμερισμάτων δύο υπνοδωματίων. Ένας υποψήφιος ενοικιαστής επιλέγει να νοικιάσει στην τύχη διαμέρισμα. Η πιθανότητα να νοικιάσει διαμέρισμα ενός υπνοδωματίου είναι:

25%
35%
50%
65%

Λύση: Έστω μ η μέση τιμή όλων των ενοικίων και p το ποσοστό των διαμερισμάτων ενός υπνοδωματίου. Τότε $\mu = p(\mu - 5.600) + (1 - p)(\mu + 10.400) \Rightarrow p = 0{,}65$. Άρα σωστή απάντηση είναι η D.

2. Μια καθηγήτρια μαθηματικών έγραψε μια λίστα αριθμών στο πίνακα και είπε στους μαθητές της να βρουν την διάμεσο και την μέση τιμή των παρατηρήσεων. Ο Κώστας μετέφερε την παραπάνω λίστα στο τετράδιο του ως εξής 10, 14, 19, 27, 36, 49, 67, 70, 94 και υπολόγισε την διάμεσο και την μέση τιμή αυτών. Η καθηγήτρια του όμως διαπίστωσε ότι ο Κώστας κατά λάθος μεταφέροντας τους αριθμούς στο τετράδιο του είχε αντιστρέψει τα ψηφία ενός από τους αριθμούς της αρχικής λίστας με αποτέλεσμα να βρει λάθος τιμές της διαμέσου και της μέσης τιμής, και του είπε να διορθώσει τον

λάθος αριθμό. Ο Κώστας διορθώνοντας το λάθος του βρήκε άλλη τιμή για την διάμεσο, και μέση τιμή που διέφερε από την παλιά κατά πέντε μονάδες. Ο λάθος αριθμός που ο Κώστας είχε στην λίστα του ήταν ο:

36
49
27
19

<u>Λύση</u>: Δεδομένου ότι θα ήταν φανερό εάν είχε αντιστρέψει το 10 ή το 70 και ότι η διάμεσος διορθώνοντας το λάθος άλλαξε, η παρατήρηση που πιθανόν να έχει αντιστραφεί ήταν μία εκ των 14, 19, 27, 36. Η αρχική λίστα του Κώστα είχε μέση τιμή μ = 42,889 και άθροισμα Σ = 386. Η σωστή λίστα θα έπρεπε να είχε άθροισμα 386 + 45 = 431 ή 386 – 45 = 341. Δοκιμάζοντας διαδοχικά τις παραπάνω παρατηρήσεις στα πιθανά αθροίσματα βρίσκουμε ότι μόνο η τιμή 27 είναι αποδεκτή. Άρα σωστή απάντηση είναι η C.

3. Μια συγκεκριμένη εταιρεία σχεδιάζει να πουλήσει ένα προϊόν, με τιμή p Ευρώ ανά μονάδα προϊόντος, όπου p τυχαίος θετικός ακέραιος αριθμός. Το μηνιαίο κόστος κατασκευής του προϊόντος (σε χιλιάδες Ευρώ) είναι 8+p, και τα προβλεπόμενα μηνιαία έσοδα από την πώληση του (σε χιλιάδες Ευρώ) είναι p(7-p). Η πιθανότητα η εταιρεία να μην έχει κέρδος από τις πωλήσεις του προϊόντος είναι:

56,33%
20,66%
83,33%
72,66%

<u>Λύση</u>: Για να έχει κέρδος η εταιρεία θα πρέπει: $p(7-p) – (8+p) > 0$, οπότε $-p^2+ 6p – 8 > 0$, άρα $p^2 – 6p + 8 < 0$, δηλαδή $(p-4)(p-2) < 0$. Η ανίσωση ισχύει όταν $2 < p < 4$, και επειδή ο p είναι θετικός ακέραιος, η ανίσωση ισχύει όταν $p = 3$. Ο p ανήκει προφανώς στο ανοικτό διάστημα (0,7), δηλαδή μπορεί να πάρει τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5, 6. Συνεπώς, η πιθανότητα η εταιρεία να μην έχει κέρδος είναι $\frac{5}{6}$ ή 83,33%. Άρα η σωστή απάντηση είναι η C.

4. Πέρυσι η Ελισσάβετ έγραψε 7 τέστ μαθηματικών και πήρε 7 διαφορετικούς ακέραιους βαθμούς μεταξύ 91 και 100 (91 ο μικρότερος και 100 ο μεγαλύτερος). Μετά από κάθε τέστ που έγραφε παρατηρούσε ότι ο μέσος όρος των βαθμών της ήταν πάντα ακέραιος. Αν ο βαθμός της στο έβδομο τεστ που έγραψε ήταν 95, ο βαθμός της στο έκτο τεστ ήταν

94
96
98
100

Λύση: Έστω μ : η μέση τιμή των έξι ακέραιων βαθμών που έγραψε η Ελισσάβετ. Τότε, $\sum_{i=1}^{6} x_i$= 6μ. Άρα $\frac{6\mu+95}{7}$= κ, όπου κ κάποιος ακέραιος μεταξύ του 91 και του 100. Συνεπώς, μ = $\frac{7\kappa-95}{6}$, όπου μ επίσης ακέραιος. Η τελευταία παράσταση γίνεται ακέραιος αριθμός μόνο όταν κ = 95 και άρα $\sum_{i=1}^{6} x_i$= 570. Για τα πέντε τεστ που έγραψε η Ελισσάβετ ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{5} x_i$= 5λ, όπου λ επίσης ακέραιος. Άρα 5λ + x_6 = 570 => x_6 = 570 – 5λ => x_6 = 5(114 – λ), δηλαδή ο ζητούμενος έκτος βαθμός θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του πέντε. Δεδομένου ότι όλοι οι βαθμοί είναι διαφορετικοί και ήδη έχει γράψει 95, ο μοναδικός ακέραιος πολλαπλάσιο του πέντε που απομένει μεταξύ του 91 και του 100, είναι το 100. Άρα η σωστή απάντηση είναι η D.

5. Ένας σηματοδότης οδικής κυκλοφορίας είναι ρυθμισμένος να λειτουργεί ως εξής. Πράσινο: 30 sec, Πορτοκαλί: 3 sec και Κόκκινο: 30 sec. Ο οδηγός ενός αυτοκινήτου επιλέγει τυχαία μια χρονική στιγμή 3 sec για να κοιτάξει τον σηματοδότη. Η πιθανότητα ο σηματοδότης να αλλάξει χρώμα την χρονική στιγμή που τον κοιτάζει είναι:

6,09%
10,87%
11,08%
14,29%

<u>Λύση</u>: Έχουμε έναν κύκλο 63 δευτερολέπτων: 0-30 δευτερόλεπτα: Πράσινο, 31-33: Κίτρινο, 34-63: Κόκκινο, και μετά πάλι από την αρχή. Τώρα πρέπει να επικεντρωθούμε σε διαστήματα 3 δευτερολέπτων στα οποία το φως αλλάζει χρώμα. Αυτά είναι τα διαστήματα: 28-29-30, 29-30-31, 30-31-32, 31-32-33, 32-33-34, 33-34-35, 61-62-63, 62-63-64, 63-64-65. Άρα κάθε 63 δευτερόλεπτα θα έχουμε εννέα περιπτώσεις, και η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\frac{9}{63}$= 0,1429. Άρα η σωστή απάντηση είναι η D.

6. Μια λίστα διαδοχικών θετικών ακεραίων αριθμών με πρώτο όρο το 1 είναι γραμμένη στον πίνακα. Ένας μαθητής, κατά λάθος, στη διάρκεια του διαλείμματος έσβησε έναν αριθμό από τον πίνακα, με αποτέλεσμα η μέση τιμή των υπολοίπων αριθμών να είναι ίση με 35 $\frac{7}{17}$. Ο αριθμός που σβήστηκε κατά λάθος από τον μαθητή ήταν ο:

7
8
9
11

<u>Λύση</u>: Από τα δεδομένα του προβλήματος γνωρίζουμε ότι έχουμε μια λίστα διαδοχικών ακεραίων αριθμών, δεν γνωρίζουμε όμως το πλήθος αυτών. Από τη μέση τιμή $35\frac{7}{17}$ καταλήγουμε ότι το πλήθος των ακεραίων της αρχικής λίστας θα πρέπει να ήταν (πολλαπλάσιο του 17 + 1) αριθμοί, δηλαδή πιθανόν 18, 35, 52, 69, 86, 103, ….. κ.ο.κ. ακέραιοι. Υποθέτοντας ότι η αρχική λίστα είχε 18 ακέραιους θα ίσχυε ότι $\sum_{i=1}^{18} x_i$= 171 και η μέση τιμή αυτών των ακεραίων αριθμών θα ήταν μ = 9,5. Ομοίως, υπολογίζοντας τους μέσους όρους για πλήθος ακεραίων αριθμών 35, 52, 69, 86, 103 ….κ.ο.κ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αρχική μας λίστα είχε 69 ακέραιους με μέση τιμή 35 και η τελική μας λίστα είχε 68 ακέραιους με μέση τιμή $35\frac{7}{17}$. Συνεπώς, $\frac{(1+2+3+...69)-x}{68}$= $35\frac{7}{17}$ => x = 7. Άρα η σωστή απάντηση είναι η A.

7.

Η παραπάνω εικόνα δείχνει μια σειρά από ασπρόμαυρες ράβδους. Ένας βάτραχος κάθεται στη μεσαία μαύρη ράβδο και σε κάθε άλμα του μπορεί να μετακινηθεί μόνο στη διπλανή του ράβδο, δεξιά ή αριστερά. Η πιθανότητα μετά από 25 άλματα ο βάτραχος να επιστρέψει στη μεσαία μαύρη ράβδο από όπου ξεκίνησε είναι:

0%

25%

75%

100%

<u>Λύση</u>: Με τον τρόπο που ο βάτραχος μετακινείται χρειάζεται πάντα άρτιο πλήθος αλμάτων για να επιστρέψει στην αρχική του θέση. Άρα η σωστή απάντηση είναι η Α.

8. Το λογιστήριο μιας εταιρείας προσπάθησε να καταγράψει και να αναλύσει τους μηνιαίους μισθούς των 100 υπαλλήλων της εταιρείας. Στην έρευνα έλαβαν μέρος όλοι οι υπάλληλοι με συμβάσεις πλήρους και μερικής απασχόλησης. Για την ευκολότερη ανάλυση των δεδομένων της έρευνας, οι μισθοί ομαδοποιήθηκαν σε δέκα ισοπλατείς κλάσεις των 100 ευρώ, δημιουργώντας τον παρακάτω πίνακα.

Μισθός σε εκατοντάδες ευρώ	**0-1**	**1-2**	**2-3**	**3-4**	**4-5**	**5-6**	**6-7**	**7-8**	**8-9**	**9-10**
Αριθμός υπαλλήλων	**2**	**5**		**12**	**17**	**20**		**9**	**7**	**4**

Κατά την καταγραφή, όμως, των δεδομένων, ο αριθμός των υπαλλήλων της 3ης και της 7ης κλάσης κατά λάθος διαγράφηκαν. Έστω Δ : η διάμεσος και Μ: η μέση τιμή των μισθών όλων των υπαλλήλων της εταιρείας, αντίστοιχα.

Γνωρίζοντας ότι:

Α. Κάθε κλάση έχει τουλάχιστον μία παρατήρηση.

Β. Οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται στην τρίτη κλάση.

Γ. Ο αριθμός των υπαλλήλων της τρίτης κλάσης είναι τέτοιος, ώστε η απόλυτη τιμή της διαφοράς της μέσης τιμής Μ από τη διάμεσο Δ να είναι ελάχιστη.

Το ποσοστό των υπαλλήλων που λαμβάνει μισθό από 220 ευρώ μέχρι 675 ευρώ είναι περίπου:

63%

68%

72%

75%

<u>**Λύση**</u>**:** Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα

Μισθός σε ευρώ	**Αριθμός υπαλλήλων**	**N_i**	**Κεντρική Τιμή Κλάσης (x_i)**	**$v_i \cdot x_i$**
[0-100)	2	2	50	100
[100-200)	5	7	150	750
[200-300)	x	7+x	250	250x
[300-400)	12	19+x	350	4.200
[400-500)	17	36+x	450	7.650
[500-600)	20	56+x	550	11.000
[600-700)	y	56+x+y	650	650y
[700-800)	9	65+x+y	750	6.750
[800-900)	7	72+x+y	850	5.950
[900-1000]	4	76+x+y	950	3.800
Σύνολο	**100**	-	-	**40.200+250x+650y**

Έχουμε ότι 76+x+y = 100 => x+y = 24 (1)

Επίσης η μέση τιμή $\mu = \frac{40.200+250x+650y}{100}$ = 402 + 2,5 x + 6,5 y , αλλά λόγω της (1)

μ = 558 – 4 x . (2)

Η διάμεσος θα βρίσκεται στην κλάση [400-500) γιατί N_i = 36 + x , ενώ στην κλάση [500-600) έχουμε N_i = 56 + x > $\frac{100}{2}$. Αντικαθιστώντας στον μαθηματικό τύπο εύρεσης της διαμέσου έχουμε ότι διάμεσος = 400 + $\frac{100}{17}$(51 – 19 – x) => διάμεσος = 582,342 – 5,882 x (3).

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε

| μέση τιμή – διάμεσος | = | 24,342 – 1,882 x | (4).

Αφού οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται στην κλάση [200-300) και κάθε κλάση έχει τουλάχιστον μία παρατήρηση οι πιθανές τιμές του x μπορεί να είναι οι 21, 22, 23. Η τιμή του x που ελαχιστοποιεί την σχέση (4) είναι η x = 21. Επομένως, y = 3.

Γνωρίζουμε όμως ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται στις κλάσεις ομοιόμορφα. Επομένως, στο διάστημα [220 – 300] ανήκουν (0,80)(21) = 16,8 υπάλληλοι και στο διάστημα [600 – 675] ανήκουν (0,75)(3) = 2,25 υπάλληλοι. Άρα τελικά στο διάστημα [220 – 675] ανήκουν συνολικά 68,05 υπάλληλοι , δηλαδή 68 υπάλληλοι από τους συνολικά 100 της επιχείρησης. Άρα η σωστή απάντηση είναι η Β.

9. Τέσσερις φίλοι φτάνουν χωριστά σε ένα θέατρο για να παρακολουθήσουν μια θεατρική παράσταση. Σε κάθε εισιτήριο που ο κάθε ένας έχει, αναγράφεται ο αριθμός της θέσης και της σειράς στην οποία θα πρέπει να καθίσουν, αλλά επειδή ο ένας από αυτούς έκανε την κράτηση διαδικτυακά για όλους, οι θέσεις τους είναι συνεχόμενες στην ίδια σειρά. Δυστυχώς, ο πρώτος που έφτασε, μετά τον έλεγχο στα εκδοτήρια του θεάτρου, χάνει το στέλεχος του εισιτηρίου του, θυμάται όμως τη σειρά και κάθεται τυχαία σε μία από τις 4 θέσεις που τους αναλογούν. Στη συνέχεια, κάθε ένας από τους υπόλοιπους που φτάνουν είτε κάθεται στη θέση που αναγράφεται στο εισιτήριό του εάν αυτή είναι άδεια, είτε κάθεται τυχαία σε κάποια άδεια θέση. Η πιθανότητα ο τελευταίος που φτάνει να καθίσει στη θέση που αναγράφει το εισιτήριο του είναι:

50%

25%

75%

100%

<u>Λύση</u>: Έστω Α, Β, Γ και Δ οι 4 φίλοι, με τη σειρά που φθάνουν στο θέατρο (1ος ο Α, 2ος ο Β, 3ος ο Γ και 4ος ο Δ) και 1, 2, 3 και 4 οι αντίστοιχες σωστές θέσεις τους: Τότε έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Ο Α κάθισε στη θέση 1. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:

Β→2, Γ→3, Δ→4

Ο Α κάθισε στη θέση 2. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:

Β→1, Γ→3, Δ→4

Β→3, Γ→1, Δ→4

Β→3, Γ→4, Δ→1

Β→4, Γ→3, Δ→1

Ο Α κάθισε στη θέση 3. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:

Β→2, Γ→1, Δ→4

Β→2, Γ→4, Δ→1

Ο Α κάθισε στη θέση 4. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:

Β→2, Γ→3, Δ→1

Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις (ο Δ να καθίσει στη σωστή του θέση 4) είναι 4, σε σύνολο 8 δυνατών περιπτώσεων, Οπότε η πιθανότητα είναι 50% και η σωστή απάντηση είναι η Α.

10. Το οδικό σύστημα μιας πόλης αποτελείται από τις κεντρικές οδικές αρτηρίες και τους παράδρομους που τέμνονται κάθετα. Οι κεντρικές οδικές αρτηρίες εκτείνονται με κατεύθυνση από ανατολή προς δύση, ενώ οι παράδρομοι με κατεύθυνση από βορρά προς νότο. Η Άννα θέλει να περπατήσει από τη διασταύρωση της 1ης οδικής αρτηρίας και του 1ου παράδρομου μέχρι τη διασταύρωση της 6ης οδικής αρτηρίας και του 3ου παράδρομου, περνώντας όμως από ακριβώς επτά διασταυρώσεις. Η φίλη της Άννας κάθεται σε ένα παγκάκι στα μισά των διασταυρώσεων της 4ης οδικής αρτηρίας και του 1ου και 2ου παράδρομου. Εάν η Άννα διαλέξει τη διαδρομή που θα ακολουθήσει τυχαία, η πιθανότητα να συναντήσει τη φίλη της είναι:

14,29%

15,12%

16,13%

17,37%

<u>Λύση</u>: Παρατηρώντας το ορθογώνιο σύστημα αξόνων ο μόνος τρόπος να μετακινηθεί η Άννα από το σημείο Α(1,1) έως το σημείο Β(3,6) περνώντας από ακριβώς επτά διασταυρώσεις είναι να μετακινηθεί 5 φορές προς τα πάνω και 2 φορές προς τα δεξιά. Η μετακίνηση της αυτή μπορεί να γίνει με $\frac{7!}{5!2!}$= 21 συνολικά τρόπους.

Για να συναντήσει η Άννα τη φίλη της θα πρέπει να περάσει οπωσδήποτε από το σημείο Κ(1,4), που η μετακίνηση αυτή μπορεί να γίνει μόνο εάν μετακινηθεί 3 φορές προς τα πάνω δηλ. κατά 1 τρόπο, και από το σημείο Λ(2,4). Η μετακίνηση της όμως από το σημείο Λ(2,4) έως το σημείο Β(3,6) μπορεί να γίνει μόνο εάν μετακινηθεί 2 φορές προς τα επάνω και 1 φορά προς τα δεξιά, δηλ κατά

$\frac{3!}{2!1!}$= 3 τρόπους. Επομένως, η Άννα μπορεί να συναντήσει την φίλη της μόνο εάν μετακινηθεί κατά (1)(3) = 3 συνολικά τρόπους και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{3}{21}$= 14,29%.

Άρα η σωστή απάντηση είναι η Α.

ΕΚΔΟΧΗ 2

1. Κάθε γυμνάσιο μιας πόλης έστειλε 3 μαθητές στον ετήσιο διαγωνισμό Μαθηματικών που οργανώνει η Ελληνική Μαθηματική Εταιρία. Κάθε μαθητής που συμμετείχε στον διαγωνισμό έλαβε μια διαφορετική ακέραια βαθμολογία από όλους τους άλλους συμμετέχοντες. Η βαθμολογία της Ανδριάνας ήταν ίση με τη διάμεση τιμή της βαθμολογίας όλων των μαθητών που συμμετείχαν και η υψηλότερη της ομάδας της. Οι άλλοι δύο συμμαθητές της, ο Νίκος και η Μαριάννα, κατέλαβαν την 37η και την 64η θέση αντίστοιχα. Ο αριθμός των γυμνασίων της πόλης είναι:

23

25

27

29

<u>Λύση:</u> Η βαθμολογία της Ανδριάνας ήταν ακέραιος αριθμός και ίση με τη διάμεση τιμή της βαθμολογίας όλων των μαθητών που συμμετείχαν στο διαγωνισμό. Άρα το πλήθος των μαθητών ήταν περιττός αριθμός και πολλαπλάσιο του 3 αφού κάθε γυμνάσιο έστειλε 3 μαθητές για να το εκπροσωπήσουν. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος οι άλλοι δύο συμμαθητές της Ανδριάνας κατέλαβαν την 37η και την 64η θέση αντίστοιχα, αλλά η βαθμολογία της ήταν υψηλότερη της ομάδας της. Θέτουμε τους βαθμούς όλων των μαθητών σε φθίνουσα σειρά και έστω κ ο αριθμός των γυμνασίων της πόλης. Η διάμεσος θα βρίσκεται στη θέση $\frac{3\kappa+1}{2}$. Θα πρέπει όμως $\frac{3\kappa+1}{2}$< 37 => κ < 24,33 => κ = 23. Η σωστή απάντηση είναι η Α.

2. Μια καθηγήτρια Μαθηματικών έγραψε μια λίστα αριθμών στον πίνακα και είπε στους μαθητές της να βρουν τη διάμεσο και τη μέση τιμή των παρατηρήσεων. Ο Κώστας μετέφερε την παραπάνω λίστα στο τετράδιό του ως εξής: 10, 14, 19, 27, 36, 49, 67, 70, 94 και υπολόγισε τη διάμεσο και τη μέση τιμή αυτών. Η καθηγήτριά του, όμως, διαπίστωσε ότι ο Κώστας, κατά λάθος, μεταφέροντας τους αριθμούς στο τετράδιό του είχε αντιστρέψει τα ψηφία ενός από τους αριθμούς της αρχικής λίστας, με αποτέλεσμα να βρει λάθος τιμές της διαμέσου και της μέσης τιμής και του είπε να διορθώσει τον λάθος αριθμό. Ο Κώστας, διορθώνοντας το λάθος του, βρήκε άλλη τιμή για τη διάμεσο και μέση τιμή που διέφερε από την παλιά κατά πέντε μονάδες. Ο λάθος αριθμός που ο Κώστας είχε στη λίστα του ήταν ο:

49
36
19
27

<u>Λύση</u>: Δεδομένου ότι θα ήταν φανερό εάν είχε αντιστρέψει το 10 ή το 70 και ότι η διάμεσος διορθώνοντας το λάθος άλλαξε, η παρατήρηση που πιθανόν να έχει αντιστραφεί ήταν μία εκ των 14, 19, 27, 36. Η αρχική λίστα του Κώστα είχε μέση τιμή μ = 42,889 και άθροισμα Σ = 386. Η σωστή λίστα θα έπρεπε να είχε άθροισμα 386 + 45 = 431 ή 386 – 45 = 341. Δοκιμάζοντας διαδοχικά τις παραπάνω παρατηρήσεις στα πιθανά αθροίσματα βρίσκουμε ότι μόνο η τιμή 27 είναι αποδεκτή. Άρα σωστή απάντηση είναι η D.

3. Σε μια Ολυμπιάδα Μαθηματικών, οι βαθμολογίες των μαθητών που έλαβαν μέρος ακολουθούν περίπου συμμετρική κατανομή, με μέση τιμή 65 και τυπική απόκλιση 10. Εάν 70 μαθητές έγραψαν καλύτερα από την Ελισάβετ, 428 μαθητές έγραψαν χειρότερα και κανένας άλλος που συμμετείχε δεν έγραψε τον ίδιο βαθμό με αυτήν, η βαθμολογία που έλαβε η Ελισάβετ βρίσκεται στο διάστημα:

[55,65]
[75,85]
[65,75]
[85,100]

Λύση: Οι μαθητές που έλαβαν μέρος στην Ολυμπιάδα Μαθηματικών ήταν 70 + 428 + 1 = 499. Θεωρούμε ότι οι βαθμολογίες αυτών ακολουθούν την κανονική κατανομή. Επομένως, (0,68)(499) = 340 μαθητές πήραν βαθμό μεταξύ 55 και 75, ενώ (0,95)(499) = 474 μαθητές πήραν βαθμό μεταξύ 45 και 85. Δεδομένου ότι οι μαθητές κατανέμονται ομοιόμορφα, 170 μαθητές πήραν βαθμό μεταξύ 55 και 65 και επίσης 170 μαθητές πήραν βαθμό μεταξύ 65 και 75. Άρα 250 + 170 = 420 μαθητές πήραν βαθμό μεταξύ 0 και 75. Επίσης, 100% - 97,5% = 2,5% των μαθητών, δηλαδή (0,025)(499) = 13 μαθητές πήραν βαθμό μεγαλύτερο από 85. Γνωρίζουμε όμως ότι 70 μαθητές έγραψαν καλύτερα από την Ελισάβετ, 428 μαθητές έγραψαν χειρότερα και κανένας άλλος που συμμετείχε δεν έγραψε τον ίδιο βαθμό με αυτήν. Συνεπώς, η Ελισάβετ πήρε βαθμό που ανήκει στο διάστημα [75,85]. Η σωστή απάντηση είναι η Β.

4. Σε μια έρευνα αγοράς, 60 άτομα κλήθηκαν να ταξινομήσουν τρία είδη παγωτού ανάλογα με τη γεύση που προτιμούν, σοκολάτα, βανίλια και φράουλα. Και τα 60 άτομα απάντησαν και καμία από τις τρεις γεύσεις δεν ταξινομήθηκε εξίσου ίδια από κανένα από τα άτομα που ρωτήθηκαν. Τα 3/5 των ατόμων ταξινόμησε τη βανίλια τελευταία, το 1/10 αυτών ταξινόμησε τη βανίλια πριν από τη σοκολάτα και το 1/3 αυτών ταξινόμησε τη βανίλια πριν από τη φράουλα. Η πιθανότητα ένα άτομο να ταξινόμησε τη βανίλια πρώτη είναι:

1,11%

2,22%

3,33%

4,44%

<u>Λύση</u>: $\frac{3}{5}$(60) = 36 άτομα ταξινόμησαν την βανίλια στην τελευταία θέση, άρα 60 – 36 = 24 άτομα την ταξινόμησαν πρώτη ή δεύτερη στην προτίμηση τους. Επίσης, $\frac{1}{10}$(60) = 6 άτομα ταξινόμησαν την βανίλια πριν την σοκολάτα, ενώ $\frac{1}{3}$(60) = 20 άτομα ταξινόμησαν την βανίλια πριν την φράουλα. Συνεπώς, την βανίλια την έβαλαν πρώτη στην προτίμησή τους 6 άτομα που ταξινόμησαν την βανίλια πριν την σοκολάτα + 20 άτομα που ταξινόμησαν την βανίλια πριν την φράουλα – 24 άτομα που την ταξινόμησαν πριν από την σοκολάτα ή πριν από την φράουλα ή πριν και από τα δύο = 2 άτομα. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{2}{60}$= 0,0333, δηλαδή 3,33%. Η σωστή απάντηση είναι η C.

5. Έστω όλα τα τρίγωνα που θα μπορούσαν να σχεδιαστούν στο ορθογώνιο επίπεδο συντεταγμένων με κορυφές ακέραιες συντεταγμένες (x, y) που ικανοποιούν τις σχέσεις 0 ≤ x ≤ 3 και 0 ≤ y ≤ 3, και μία από τις πλευρές τους να βρίσκεται στον άξονα xx΄. Η πιθανότητα το εμβαδόν του τριγώνου να είναι ακέραιος αριθμός είναι:

48,67%

51,33%

55,56%

66,67%

<u>Λύση</u>: Δεδομένου ότι η μια πλευρά του τριγώνου βρίσκεται στον άξονα xx’, οι δύο κορυφές του θα έχουν συντεταγμένες της μορφής (x_1,0) και (x_2,0) με x_1 και x_2 να παίρνουν αντίστοιχα τις τιμές 0,1,2 και 3. Για να σχηματίσουμε τρίγωνο θα πρέπει το y να παίρνει τις τιμές 1,2 και 3. Μπορούμε να πάρουμε (2C4) = 6 σημεία για τη βάση και (4.3) = 12 σημεία για την κορυφή, και συνεπώς μπορούμε να σχηματίσουμε (6.12) = 72 τρίγωνα. Γνωρίζουμε ότι Ε(τριγώνου) = $\frac{1}{2}$(μήκος βάσης).(μήκος ύψους). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

I. Το μήκος της βάσης στον άξονα xx΄ είναι περιττός αριθμός.

Μπορούμε να πάρουμε τα σημεία (0,0) και (1,0) , (1,0) και (2,0) , (2,0) και (3,0) , (0,0) και (3,0) ως βάση με μήκος περιττό αριθμό, και τα σημεία (0,2), (1,2), (2,2), (3,2) ως ύψος με μήκος 2. Άρα, συνολικά (4).(4) = 16 τρίγωνα με ακέραιο εμβαδόν.

II.Το μήκος της βάσης στον άξονα xx΄ είναι άρτιος αριθμός.

Μπορούμε να πάρουμε τα σημεία (0,0) και (2,0) , (1,0) και (3,0) ως βάση με μήκος άρτιο αριθμό και την κορυφή του τριγώνου οπουδήποτε με τιμές του x 0,1,2 και 3 και τιμές του y 1,2 και 3 αντίστοιχα. Άρα θα έχουμε συνολικά 2. (4.3) = 24 τρίγωνα με ακέραιο εμβαδόν.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\frac{24+16}{40}$= 0,5556. Η σωστή απάντηση είναι η C.

6. Μια λίστα διαδοχικών θετικών ακεραίων αριθμών με πρώτο όρο το 1 είναι γραμμένη στον πίνακα. Ένας μαθητής, κατά λάθος, στη διάρκεια του διαλείμματος έσβησε έναν αριθμό από τον πίνακα, με αποτέλεσμα η μέση τιμή των υπολοίπων αριθμών να είναι ίση με 35 $\frac{7}{17}$. Ο αριθμός που σβήστηκε κατά λάθος από τον μαθητή ήταν ο:

9

8

7

11

<u>Λύση</u>: Από τα δεδομένα του προβλήματος γνωρίζουμε ότι έχουμε μια λίστα διαδοχικών ακεραίων αριθμών, δεν γνωρίζουμε όμως το πλήθος αυτών. Από τη μέση τιμή $35\frac{7}{17}$ καταλήγουμε ότι το πλήθος των ακεραίων της αρχικής λίστας θα πρέπει να ήταν (πολλαπλάσιο του 17 + 1) αριθμοί, δηλαδή πιθανόν 18, 35, 52, 69, 86, 103, ….. κ.ο.κ. ακέραιοι. Υποθέτοντας ότι η αρχική λίστα είχε 18 ακέραιους θα ίσχυε ότι $\sum_{i=1}^{18} x_i$= 171 και η μέση τιμή αυτών των ακεραίων αριθμών θα ήταν μ = 9,5. Ομοίως, υπολογίζοντας τους μέσους όρους για πλήθος ακεραίων αριθμών 35, 52, 69, 86, 103 ….κ.ο.κ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αρχική μας λίστα είχε 69 ακέραιους με μέση τιμή 35 και η τελική μας λίστα είχε 68 ακέραιους με μέση τιμή $35\frac{7}{17}$. Συνεπώς, $\frac{(1+2+3+...69)-x}{68}$= $35\frac{7}{17}$ => x = 7. Άρα η σωστή απάντηση είναι η C.

7. Τρεις φίλοι έχουν 32 ευρώ, 72 ευρώ και 98 ευρώ, αντίστοιχα. Εάν συγκεντρώσουν τα χρήματά τους και τα αναδιανείμουν μεταξύ τους, η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η διάμεσος των νέων χρημάτων που θα έχουν είναι:

65 ευρώ
81 ευρώ
96 ευρώ
101 ευρώ

<u>Λύση</u>: Το σύνολο των χρημάτων και των τριών φίλων είναι 32 + 72 + 98 = 202 ευρώ. Έστω ότι κατά την αναδιανομή ο πρώτος παίρνει το μικρότερο ποσό α, ο δεύτερος παίρνει ένα ποσό ίσο με τη διάμεσο β, και ο τρίτος παίρνει το μεγαλύτερο ποσό γ. Θα πρέπει α + β + γ = 202. Για να λάβει το β την μεγίστη τιμή του, θα πρέπει να λάβουν τις ελάχιστες τιμές τους τα α και γ. Συνεπώς, 0 + β + β = 202 => 2β = 202 => β = 101. Η σωστή απάντηση είναι η D.

8. Το λογιστήριο μιας εταιρείας προσπάθησε να καταγράψει και να αναλύσει τους μηνιαίους μισθούς των 100 υπαλλήλων της εταιρείας. Στην έρευνα έλαβαν μέρος όλοι οι υπάλληλοι με συμβάσεις πλήρους και μερικής απασχόλησης. Για την ευκολότερη ανάλυση των δεδομένων της έρευνας, οι μισθοί ομαδοποιήθηκαν σε δέκα ισοπλατείς κλάσεις των 100 ευρώ, δημιουργώντας τον παρακάτω πίνακα.

Μισθός σε εκατοντάδες Ευρώ	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
Αριθμός υπαλλήλων	2	5		12	17	20		9	7	4

Κατά την καταγραφή, όμως, των δεδομένων ο αριθμός των υπαλλήλων της 3ης και της 7ης κλάσης κατά λάθος διαγράφηκαν. Έστω Δ : η διάμεσος και Μ: η μέση τιμή των μισθών όλων των υπαλλήλων της εταιρείας, αντίστοιχα.

Γνωρίζοντας ότι:

Α. Κάθε κλάση έχει τουλάχιστον μία παρατήρηση.

Β. Οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται στην τρίτη κλάση.

Γ. Ο αριθμός των υπαλλήλων της τρίτης κλάσης είναι τέτοιος, ώστε η απόλυτη τιμή της διαφοράς της μέσης τιμής Μ από τη διάμεσο Δ να είναι ελάχιστη,

Το ποσοστό των υπαλλήλων που λαμβάνει μισθό από 220 ευρώ μέχρι 675 ευρώ είναι περίπου:

68%

63%

72%

75%

<u>Λύση</u>: Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα

Μισθός σε ευρώ	**Αριθμός υπαλλήλων**	N_i	**Κεντρική Τιμή Κλάσης (x_i)**	$v_i \cdot x_i$
[0-100)	2	2	50	100
[100-200)	5	7	150	750
[200-300)	x	7+x	250	250x
[300-400)	12	19+x	350	4.200
[400-500)	17	36+x	450	7.650
[500-600)	20	56+x	550	11.000
[600-700)	y	56+x+y	650	650y

[700-800)	9	65+x+y	750	6.750
[800-900)	7	72+x+y	850	5.950
[900-1000]	4	76+x+y	950	3.800
Σύνολο	**100**	-	-	**40.200+250x+650y**

Έχουμε ότι 76+x+y = 100 => x+y = 24 (1)

Επίσης η μέση τιμή μ = $\frac{40.200+250x+650y}{100}$= 402 + 2,5 x + 6,5 y , αλλά λόγω της (1)

μ = 558 – 4 x . (2)

Η διάμεσος θα βρίσκεται στην κλάση [400-500) γιατί N_i = 36 + x , ενώ στην κλάση [500-600) έχουμε N_i = 56 + x > $\frac{100}{2}$. Αντικαθιστώντας στον μαθηματικό τύπο εύρεσης της διαμέσου έχουμε ότι διάμεσος = 400 + $\frac{100}{17}$(51 – 19 – x) => διάμεσος = 582,342 – 5,882 x (3).

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε

| μέση τιμή – διάμεσος | = | 24,342 – 1,882 x | (4).

Αφού οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται στην κλάση [200-300) και κάθε κλάση έχει τουλάχιστον μία παρατήρηση οι πιθανές τιμές του x μπορεί να είναι οι 21, 22, 23. Η τιμή του x που ελαχιστοποιεί την σχέση (4) είναι η x = 21. Επομένως, y = 3.

Γνωρίζουμε όμως ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται στις κλάσεις ομοιόμορφα. Επομένως, στο διάστημα [220 – 300] ανήκουν (0,80)(21) = 16,8 υπάλληλοι και στο διάστημα [600 – 675] ανήκουν (0,75)(3) = 2,25 υπάλληλοι. Άρα τελικά στο διάστημα [220 – 675] ανήκουν συνολικά 68,05 υπάλληλοι , δηλαδή 68 υπάλληλοι από τους συνολικά 100 της επιχείρησης. Άρα η σωστή απάντηση είναι η Α.

9. Τέσσερις φίλοι φτάνουν χωριστά σε ένα θέατρο για να παρακολουθήσουν μια θεατρική παράσταση. Σε κάθε εισιτήριο που ο κάθε ένας έχει, αναγράφεται ο αριθμός της θέσης και της σειράς στην οποία θα πρέπει να καθίσουν, αλλά επειδή ο ένας από αυτούς έκανε την κράτηση διαδικτυακά για όλους, οι θέσεις τους είναι συνεχόμενες στην ίδια σειρά. Δυστυχώς, ο πρώτος που έφτασε μετά τον έλεγχο στα εκδοτήρια του θεάτρου, χάνει το στέλεχος του εισιτηρίου του, θυμάται όμως τη σειρά και κάθεται τυχαία σε μία από τις 4 θέσεις που τους αναλογούν. Στη συνέχεια, κάθε ένας από τους

υπόλοιπους που φτάνουν είτε κάθεται στη θέση που αναγράφεται στο εισιτήριό του εάν αυτή είναι άδεια, είτε κάθεται τυχαία σε κάποια άδεια θέση. Η πιθανότητα ο τελευταίος που φτάνει να καθίσει στη θέση που αναγράφει το εισιτήριό του είναι:

25%
75%
50%
100%

<u>Λύση</u>: Έστω Α, Β, Γ και Δ οι 4 φίλοι, με τη σειρά που φθάνουν στο θέατρο (1ος ο Α, 2ος ο Β, 3ος ο Γ και 4ος ο Δ) και 1, 2, 3 και 4 οι αντίστοιχες σωστές θέσεις τους: Τότε έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Ο Α κάθισε στη θέση 1. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:

Β→2, Γ→3, Δ→4

Ο Α κάθισε στη θέση 2. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:

Β→1, Γ→3, Δ→4

Β→3, Γ→1, Δ→4

Β→3, Γ→4, Δ→1

Β→4, Γ→3, Δ→1

Ο Α κάθισε στη θέση 3. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:

Β→2, Γ→1, Δ→4

Β→2, Γ→4, Δ→1

Ο Α κάθισε στη θέση 4. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:

Β→2, Γ→3, Δ→1

Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις (ο Δ να καθίσει στη σωστή του θέση 4) είναι 4, σε σύνολο 8 δυνατών περιπτώσεων, Οπότε η πιθανότητα είναι 50% και η σωστή απάντηση είναι η C.

10. Το οδικό σύστημα μιας πόλης αποτελείται από τις κεντρικές οδικές αρτηρίες και τους παράδρομους που τέμνονται κάθετα. Οι κεντρικές οδικές αρτηρίες εκτείνονται με κατεύθυνση από ανατολή προς δύση, ενώ οι παράδρομοι με κατεύθυνση από βορρά προς νότο. Η Άννα θέλει να περπατήσει από τη διασταύρωση της 1ης οδικής αρτηρίας και του 1ου παράδρομου μέχρι τη διασταύρωση της 6ης οδικής αρτηρίας και του 3ου παράδρομου, περνώντας, όμως, από ακριβώς επτά διασταυρώσεις. Η φίλη της Άννας

κάθεται σε ένα παγκάκι στα μισά των διασταυρώσεων της 4ης οδικής αρτηρίας και του 1ου και 2ου παράδρομου. Εάν η Άννα διαλέξει τη διαδρομή που θα ακολουθήσει τυχαία, η πιθανότητα να συναντήσει τη φίλη της είναι:

16,13%

15,12%

14,29%

17,37%

Λύση: Παρατηρώντας το ορθογώνιο σύστημα αξόνων ο μόνος τρόπος να μετακινηθεί η Άννα από το σημείο Α(1,1) έως το σημείο Β(3,6) περνώντας από ακριβώς επτά διασταυρώσεις είναι να μετακινηθεί 5 φορές προς τα πάνω και 2 φορές προς τα δεξιά. Η μετακίνηση της αυτή μπορεί να γίνει με $\frac{7!}{5!2!}$= 21 συνολικά τρόπους.

Για να συναντήσει η Άννα τη φίλη της θα πρέπει να περάσει οπωσδήποτε από το σημείο Κ(1,4), που η μετακίνηση αυτή μπορεί να γίνει μόνο εάν μετακινηθεί 3 φορές προς τα πάνω δηλ. κατά 1 τρόπο, και από το σημείο Λ(2,4). Η μετακίνηση της όμως από το σημείο Λ(2,4) έως το σημείο Β(3,6) μπορεί να γίνει μόνο εάν μετακινηθεί 2 φορές προς τα επάνω και 1 φορά προς τα δεξιά, δηλ κατά

$\frac{3!}{2!1!}$ = 3 τρόπους. Επομένως, η Άννα μπορεί να συναντήσει την φίλη της μόνο εάν μετακινηθεί κατά (1)(3) = 3 συνολικά τρόπους και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{3}{21}$= 14,29%.

Άρα η σωστή απάντηση είναι η C.

ΕΚΔΟΧΗ 3

1. Ο Γιάννης στέκεται στην αρχή των αξόνων ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων (x,y). Στη συνέχεια αποφασίζει να κάνει ένα τυχαίο άλμα μιας μονάδας μέτρησης προς μια από τις πιθανές κατευθύνσεις πάνω, κάτω, αριστερά ή δεξιά. Εάν κάνει 3 ακόμη τυχαία άλματα υπό τις ίδιες συνθήκες, η πιθανότητα να καταλήξει ξανά στην αρχή των αξόνων είναι:

11,27%

13,33%

14,06%

16,67%

__Λύση__: Έστω ότι ο Γιάννης ξεκινά κάνοντας ένα βήμα δεξιά. Τότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις για να ξαναγυρίσει στην αρχή των αξόνων

1η Περίπτωση: 1 βήμα πάνω, 1 βήμα αριστερά, 1 βήμα κάτω ή 1 βήμα κάτω, 1 βήμα αριστερά, 1 βήμα πάνω. Συνεπώς, συνολικά 2 τρόποι

2η Περίπτωση: 1 βήμα δεξιά και 2 βήματα αριστερά ή 1 βήμα πάνω, 1 βήμα κάτω, 1 βήμα αριστερά ή 1 βήμα κάτω, 1 βήμα πάνω, 1 βήμα αριστερά. Συνεπώς, συνολικά 3 τρόποι

3η Περίπτωση: 2 βήματα αριστερά και 1 βήμα δεξιά ή 1 βήμα αριστερά, 1 βήμα πάνω, 1 βήμα κάτω ή 1 βήμα αριστερά, 1 βήμα κάτω, 1 βήμα πάνω. Συνεπώς, συνολικά 3 τρόποι

4η Περίπτωση: 1 βήμα αριστερά, 1 βήμα δεξιά, 1 βήμα αριστερά. Συνεπώς, συνολικά 1 τρόπος

Επομένως, ο Γιάννης εάν κάνει αρχικά 1 βήμα προς τα δεξιά μπορεί να επιστρέψει στην αρχή των αξόνων με 9 συνολικά τρόπους. Άρα αφού μπορεί αρχικά να μετακινηθεί πάνω, κάτω, αριστερά ή δεξιά μπορεί τελικά να επιστρέψει στην αρχή των αξόνων με 4.9 = 36 τρόπους.

Ο συνολικός αριθμός μετακινήσεων του Γιάννη πάνω στους άξονες είναι με $4^4 = 256$ τρόπους. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{36}{256}$= 0,1406, δηλαδή 14,06%. Σωστή απάντηση είναι η C.

2. Μια καθηγήτρια Μαθηματικών έγραψε μια λίστα αριθμών στον πίνακα και είπε στους μαθητές της να βρουν τη διάμεσο και τη μέση τιμή των παρατηρήσεων. Ο Κώστας μετέφερε την παραπάνω λίστα στο τετράδιό του ως εξής: 10, 14, 19, 27, 36, 49, 67, 70, 94 και υπολόγισε τη διάμεσο και τη μέση τιμή αυτών. Η καθηγήτριά του, όμως, διαπίστωσε ότι ο Κώστας, κατά λάθος, μεταφέροντας τους αριθμούς στο τετράδιό του είχε αντιστρέψει τα ψηφία ενός από τους αριθμούς της αρχικής λίστας, με αποτέλεσμα να βρει λάθος τιμές της διαμέσου και της μέσης τιμής και του είπε να διορθώσει τον λάθος αριθμό. Ο Κώστας, διορθώνοντας το λάθος του, βρήκε άλλη τιμή για τη διάμεσο και μέση τιμή που διέφερε από την παλιά κατά πέντε μονάδες. Ο λάθος αριθμός που ο Κώστας είχε στην λίστα του ήταν ο:

27
49
19
36

<u>Λύση</u>: Δεδομένου ότι θα ήταν φανερό εάν είχε αντιστρέψει το 10 ή το 70 και ότι η διάμεσος διορθώνοντας το λάθος άλλαξε, η παρατήρηση που πιθανόν να έχει αντιστραφεί ήταν μία εκ των 14, 19, 27, 36. Η αρχική λίστα του Κώστα είχε μέση τιμή μ = 42,889 και άθροισμα Σ = 386. Η σωστή λίστα θα έπρεπε να είχε άθροισμα 386 + 45 = 431 ή 386 – 45 = 341. Δοκιμάζοντας διαδοχικά τις παραπάνω παρατηρήσεις στα πιθανά αθροίσματα βρίσκουμε ότι μόνο η τιμή 27 είναι αποδεκτή. Άρα σωστή απάντηση είναι η C.

3. Σε μια τάξη, το 1/5 των αγοριών έχουν ύψος μικρότερο από το πιο κοντό κορίτσι της τάξης και το 1/3 των κοριτσιών έχουν ύψος μεγαλύτερο από το πιο ψηλό αγόρι της τάξης. Η τάξη αποτελείται από 16 μαθητές και κανένας μαθητής δεν έχει το ίδιο ύψος με κάποιον άλλον. Η πιθανότητα να επιλέξουμε τυχαία κάποιον μαθητή με ύψος μεγαλύτερο από το πιο κοντό κορίτσι και μικρότερο από το πιο ψηλό αγόρι είναι:

62,5%
65,7%
75%
95%

<u>Λύση</u>: Από τα δεδομένα του προβλήματος αντιλαμβανόμαστε ότι η μόνη δυνατή περίπτωση είναι η τάξη να αποτελείται από 10 αγόρια και 6 κορίτσια. Από αυτά έχουμε $\frac{1}{5}(10) = 2$ αγόρια με ύψος μικρότερο από το πιο κοντό κορίτσι της τάξης και $\frac{1}{3}(6) = 2$ κορίτσια με ύψος μεγαλύτερο από το πιο ψηλό αγόρι της τάξης. Έστω Κ το πιο κοντό κορίτσι και Α το πιο ψηλό αγόρι της τάξης. Θα ισχύει η ανισότητα: 2 < Κ < ….. < Α < 2. Μεταξύ του Κ και του Α θα βρίσκονται 6Κ – 2Κ – Κ = 3 κορίτσια και 10Α – 2Α – Α = 7 αγόρια , δηλαδή 10 μαθητές της τάξης. Η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\frac{10}{16}$= 0,625, δηλαδή 62,5% και η σωστή απάντηση είναι η A.

4. Ένας μαθηματικός ειδικεύεται στη δημιουργία πρωτότυπων μαθηματικών ασκήσεων πανεπιστημιακού επιπέδου και με την ιδιότητά του αυτή εργάζεται επί χρόνια σε έναν εκδοτικό οίκο που εκδίδει βοηθητικά συγγράμματα για τους πρωτοετείς φοιτητές των ελληνικών πανεπιστημίων. Το ετήσιο εισόδημά του προκύπτει από τον συνδυασμό ενός βασικού μισθού 200 ευρώ εβδομαδιαίως και 9 ευρώ για κάθε μία πρωτότυπη άσκηση μαθηματικών που παραδίδει στον εκδοτικό του οίκο. Κάθε χρόνο, τους καλοκαιρινούς μήνες, ο μαθηματικός παίρνει δύο εβδομάδες μη αμειβόμενη άδεια για να ξεκουραστεί. Εάν κάθε έτος αποτελείται από 52 εβδομάδες και ο μαθηματικός παρέδωσε, μέσα σε κάθε ένα από τα τελευταία 5 έτη, έναν περιττό αριθμό πρωτότυπων ασκήσεων μεγαλύτερο του 20, ποιο από τα κατωτέρω εισοδήματα θα μπορούσε να είναι η διάμεσος των ετήσιων εισοδημάτων του τα τελευταία 5 έτη;

22.474 ευρώ
23.673 ευρώ
25.318 ευρώ
28.423 ευρώ

<u>**Λύση**</u>**:** Η ζητούμενη πιθανή διάμεσος θα είναι σίγουρα κάποιος ακέραιος αριθμός και σίγουρα κάποιο από τα ετήσια εισοδήματα του. Έστω ν: ο μεγαλύτερος του 20 περιττός αριθμός πρωτότυπων ασκήσεων που ο μαθηματικός παρέδωσε στον εκδοτικό του οίκο. Η συνάρτηση των ετήσιων εισοδημάτων του θα είναι της μορφής Εισόδημα = (52 – 2).200 + 9.ν => Εισόδημα = 10.000 + 9ν =>

$\frac{Εισόδημα - 10.000}{9}$= ν. Η μόνη δυνατή λύση από τις τέσσερις προτεινόμενες είναι η 28.423 και η σωστή απάντηση είναι η D.

5. Μια λίστα αριθμών περιλαμβάνει έξι θετικούς ακέραιους. Οι τρεις από αυτούς είναι γνωστοί και είναι οι: 4, 5 και 24, ενώ οι άλλοι τρεις είναι διαφορετικοί και άγνωστοι. Εάν είναι γνωστό ότι ο μέσος όρος της λίστας είναι 10 και η διάμεσος βρίσκεται μεταξύ του 7 και του 8, τότε από τους παρακάτω ακεραίους <u>δεν</u> βρίσκεται στη λίστα ο αριθμός:

5

11

12

13

<u>Λύση</u>: Δεδομένου ότι η διάμεση τιμή είναι μεταξύ 7 και 8, η διάμεσος της λίστας των έξι θετικών ακεραίων μπορεί να είναι μόνο 7,5. Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή = 10, η διάμεσος = 7,5 και ότι υπάρχουν 6 στοιχεία στη λίστα των αριθμών. Συνεπώς 4 + 5 + 24 + x + y + z = 60 => x + y + z = 27.

Άρα το άθροισμα του τρίτου και τέταρτου στοιχείου της λίστας θα πρέπει να είναι (7,5). 2 = 15

Υπάρχουν δύο πιθανές περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: Δύο από τους τρεις ακέραιους αριθμούς x, y και z θα μπορούσαν να είναι ο τρίτος και ο τέταρτος αριθμός. Σε αυτήν την περίπτωση, δεδομένου ότι ήδη το 4 και το 5 είναι μικρότερα από 7,5, ένας από τους άγνωστους αριθμούς θα είναι μικρότερος από 7,5 (ο τρίτος αριθμός) και οι άλλοι δύο θα είναι μεγαλύτεροι από 7,5. Το άθροισμα του τρίτου και τέταρτου στοιχείου της λίστας είναι 15 έτσι 15 + z = 27 => z = 12. Συνεπώς, οι δύο αριθμοί θα μπορούσαν να είναι οι 5 και 10, 6 και 9 και 7 και 8, ενώ οι x, y και z θα μπορούσαν να πάρουν τις τιμές 5, 6, 7, 8, 9, 10 και 12.

2η Περίπτωση: Το 5 θα μπορούσε να είναι ο τρίτος αριθμός, οπότε ένας από τους άγνωστους αριθμούς είναι μικρότερος από 5 και δύο από τους άγνωστους αριθμούς θα ήταν μεγαλύτεροι από 7,5.

Εάν ο τρίτος αριθμός είναι 5, ο τέταρτος αριθμός πρέπει να είναι 10 για να πάρει η διάμεσος την τιμή 7,5. Ως εκ τούτου, το 10 πρέπει να είναι ένας από τους άγνωστους αριθμούς και το άθροισμα των δύο άλλων άγνωστων αριθμών θα είναι 27 - 10 = 17. Ένας από αυτούς θα πρέπει να είναι μικρότερος από 5 και ο άλλος μεγαλύτερος από 10. Έτσι οι πιθανές επιλογές είναι 4 και 13, 3 και 14, 2 και 15, 1 και 16 ενώ οι x, y και z θα μπορούσαν να πάρουν διάφορες τιμές.

Συνεπώς, σε καμία περίπτωση δεν θα μπορούσε να είναι στη λίστα ο αριθμός 11 και η σωστή απάντηση είναι η Β.

6. Μια λίστα διαδοχικών θετικών ακεραίων αριθμών με πρώτο όρο το 1 είναι γραμμένη στον πίνακα. Ένας μαθητής, κατά λάθος, στη διάρκεια του διαλείμματος έσβησε έναν αριθμό από τον πίνακα, με αποτέλεσμα η μέση τιμή των υπολοίπων αριθμών να είναι ίση με 35 $\frac{7}{17}$. Ο αριθμός που διαγράφηκε από τον μαθητή ήταν ο:

8
9
11
7

<u>Λύση</u>: Από τα δεδομένα του προβλήματος γνωρίζουμε ότι έχουμε μια λίστα διαδοχικών ακεραίων αριθμών, δεν γνωρίζουμε όμως το πλήθος αυτών. Από τη μέση τιμή $35\frac{7}{17}$ καταλήγουμε ότι το πλήθος των ακεραίων της αρχικής λίστας θα πρέπει να ήταν (πολλαπλάσιο του 17 + 1) αριθμοί, δηλαδή πιθανόν 18, 35, 52, 69, 86, 103, ….. κ.ο.κ. ακέραιοι. Υποθέτοντας ότι η αρχική λίστα είχε 18 ακέραιους θα ίσχυε ότι $\sum_{i=1}^{18} x_i$= 171 και η μέση τιμή αυτών των ακεραίων αριθμών θα ήταν μ = 9,5. Ομοίως, υπολογίζοντας τους μέσους όρους για πλήθος ακεραίων αριθμών 35, 52, 69, 86, 103 ….κ.ο.κ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αρχική μας λίστα είχε 69 ακέραιους με μέση τιμή 35 και η τελική μας λίστα είχε 68 ακέραιους με μέση τιμή $35\frac{7}{17}$. Συνεπώς, $\frac{(1+2+3+...69)-x}{68}$= $35\frac{7}{17}$ => x = 7. Άρα η σωστή απάντηση είναι η Α.

7. Ο συνολικός αριθμός των εισαγόμενων και εξαγόμενων προϊόντων μιας χώρας (σε εκατομμύρια μονάδες προϊόντων), κατά το έτος 2019, ανήλθε σε 200 εκατομμύρια και 100 εκατομμύρια, αντίστοιχα. Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει αναλυτικά τα αντίστοιχα ποσοστά των ειδών προϊόντων.

Είδος προϊόντος	Ποσοστό εισαγόμενων μονάδων προϊόντων	Ποσοστό εξαγόμενων μονάδων προϊόντων
Αυτοκίνητα	**50%**	**10%**
Είδη κλωστοϋφαντουργίας	**30%**	**20%**
Είδη τροφίμων	**5%**	**40%**
Είδη Τεχνολογίας	**15%**	**30%**

Εάν διπλάσιος αριθμός εισαγομένων αυτοκινήτων από αυτά που εξήχθησαν από τη χώρα αντιμετώπισε ηλεκτρολογικά προβλήματα κατά το πρώτο έτος κτήσης του και το 20% των εξαγόμενων αυτοκινήτων αντιμετώπισε ηλεκτρολογικά προβλήματα στο ίδιο χρονικό διάστημα, η πιθανότητα ένας κάτοχος εισαγόμενου αυτοκινήτου να αντιμετώπισε ηλεκτρολογικό πρόβλημα κατά το πρώτο έτος κτήσης του είναι:

1%
3%
4%
6%

<u>Λύση</u>: Από τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα (0,20).(0,10).(100.000.000) = 2.000.000 αυτοκίνητα που εξήχθησαν αντιμετώπισε ηλεκτρολογικό πρόβλημα. Συνεπώς, (2).(2.000.000) = 4.000.000 αυτοκίνητα που εισήχθησαν αντιμετώπισε ηλεκτρολογικό πρόβλημα. Ο συνολικός αριθμός εισαγόμενων αυτοκινήτων με ηλεκτρολογικό πρόβλημα ήταν (0,50).(200.000.000) = 100.000.000. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{4.000.000}{100.000.000}$= 0,04, δηλαδή 4%, και η σωστή απάντηση είναι η C.

8. Το λογιστήριο μιας εταιρείας προσπάθησε να καταγράψει και να αναλύσει τους μηνιαίους μισθούς των 100 υπαλλήλων της εταιρείας. Στην έρευνα έλαβαν μέρος όλοι οι υπάλληλοι με συμβάσεις πλήρους και μερικής απασχόλησης. Για την ευκολότερη ανάλυση των δεδομένων της έρευνας, οι μισθοί ομαδοποιήθηκαν σε δέκα ισοπλατείς κλάσεις των 100 ευρώ, δημιουργώντας τον παρακάτω πίνακα.

Μισθός σε εκατοντάδες Ευρώ	**0-1**	**1-2**	**2-3**	**3-4**	**4-5**	**5-6**	**6-7**	**7-8**	**8-9**	**9-10**
Αριθμός υπαλλήλων	**2**	**5**		**12**	**17**	**20**		**9**	**7**	**4**

Κατά την καταγραφή, όμως, των δεδομένων, ο αριθμός των υπαλλήλων της 3ης και της 7ης κλάσης κατά λάθος διαγράφηκαν. Έστω Δ : η διάμεσος και Μ: η μέση τιμή των μισθών όλων των υπαλλήλων της εταιρείας, αντίστοιχα.

Γνωρίζοντας ότι:

Α. Κάθε κλάση έχει τουλάχιστον μία παρατήρηση.

Β. Οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται στην τρίτη κλάση.

Γ. Ο αριθμός των υπαλλήλων της τρίτης κλάσης είναι τέτοιος, ώστε η απόλυτη τιμή της διαφοράς της μέσης τιμής Μ από τη διάμεσο Δ να είναι ελάχιστη.

Το ποσοστό των υπαλλήλων που λαμβάνει μισθό από 220 ευρώ μέχρι 675 ευρώ είναι περίπου:

63%

75%

72%

68%

<u>Λύση</u>: Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα

Μισθός σε ευρώ	**Αριθμός υπαλλήλων**	**N_i**	**Κεντρική Τιμή Κλάσης (x_i)**	**$v_i \,.\, x_i$**
[0-100)	2	2	50	100
[100-200)	5	7	150	750
[200-300)	x	7+x	250	250x
[300-400)	12	19+x	350	4.200
[400-500)	17	36+x	450	7.650
[500-600)	20	56+x	550	11.000
[600-700)	y	56+x+y	650	650y
[700-800)	9	65+x+y	750	6.750
[800-900)	7	72+x+y	850	5.950
[900-1000]	4	76+x+y	950	3.800
Σύνολο	**100**	-	-	**40.200+250x+650y**

Έχουμε ότι 76+x+y = 100 => x+y = 24 (1)

Επίσης η μέση τιμή μ = $\frac{40.200+250\,x+650\,y}{100}$= 402 + 2,5 x + 6,5 y , αλλά λόγω της (1)

μ = 558 – 4 x . (2)

Η διάμεσος θα βρίσκεται στην κλάση [400-500) γιατί N_i = 36 + x , ενώ στην κλάση [500-600) έχουμε N_i = 56 + x > $\frac{100}{2}$. Αντικαθιστώντας στον μαθηματικό τύπο εύρεσης της διαμέσου έχουμε ότι διάμεσος = 400 + $\frac{100}{17}$(51 – 19 – x) => διάμεσος = 582,342 – 5,882 x (3).

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε

| μέση τιμή – διάμεσος | = | 24,342 – 1,882 x | (4).

Αφού οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται στην κλάση [200-300) και κάθε κλάση έχει τουλάχιστον μία παρατήρηση οι πιθανές τιμές του x μπορεί να είναι οι 21, 22, 23. Η τιμή του x που ελαχιστοποιεί την σχέση (4) είναι η x = 21. Επομένως, y = 3.

Γνωρίζουμε όμως ότι οι παρατηρήσεις κατανέμονται στις κλάσεις ομοιόμορφα. Επομένως, στο διάστημα [220 – 300] ανήκουν (0,80)(21) = 16,8 υπάλληλοι και στο διάστημα [600 – 675] ανήκουν (0,75)(3) = 2,25 υπάλληλοι. Άρα τελικά στο διάστημα [220 – 675] ανήκουν συνολικά 68,05 υπάλληλοι , δηλαδή 68 υπάλληλοι από τους συνολικά 100 της επιχείρησης. Άρα η σωστή απάντηση είναι η D.

9. Τέσσερις φίλοι φτάνουν χωριστά σε ένα θέατρο για να παρακολουθήσουν μια θεατρική παράσταση. Σε κάθε εισιτήριο που ο κάθε ένας έχει, αναγράφεται ο αριθμός της θέσης και της σειράς στην οποία θα πρέπει να καθίσουν, αλλά επειδή ο ένας από αυτούς έκανε την κράτηση διαδικτυακά για όλους, οι θέσεις τους είναι συνεχόμενες στην ίδια σειρά. Δυστυχώς, ο πρώτος που έφτασε, μετά τον έλεγχο στα εκδοτήρια του θεάτρου, χάνει το στέλεχος του εισιτηρίου του, θυμάται όμως τη σειρά και κάθεται τυχαία σε μία από τις 4 θέσεις που τους αναλογούν. Στη συνέχεια, κάθε ένας από τους υπόλοιπους που φτάνουν είτε κάθεται στη θέση που αναγράφεται στο εισιτήριό του εάν αυτή είναι άδεια, είτε κάθεται τυχαία σε κάποια άδεια θέση. Η πιθανότητα ο τελευταίος που φτάνει να καθίσει στη θέση που αναγράφει το εισιτήριό του είναι:

25%
50%
75%
100%

<u>**Λύση**</u>**:** Έστω Α, Β, Γ και Δ οι 4 φίλοι, με τη σειρά που φθάνουν στο θέατρο (1ος ο Α, 2ος ο Β, 3ος ο Γ και 4ος ο Δ) και 1, 2, 3 και 4 οι αντίστοιχες σωστές θέσεις τους: Τότε έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:
Ο Α κάθισε στη θέση 1. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:
Β→2, Γ→3, Δ→4
Ο Α κάθισε στη θέση 2. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:
Β→1, Γ→3, Δ→4
Β→3, Γ→1, Δ→4
Β→3, Γ→4, Δ→1
Β→4, Γ→3, Δ→1
Ο Α κάθισε στη θέση 3. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:
Β→2, Γ→1, Δ→4
Β→2, Γ→4, Δ→1
Ο Α κάθισε στη θέση 4. Τότε οι πιθανές θέσεις για τους Β, Γ και Δ είναι:
Β→2, Γ→3, Δ→1
Άρα οι ευνοϊκές περιπτώσεις (ο Δ να καθίσει στη σωστή του θέση 4) είναι 4, σε σύνολο 8 δυνατών περιπτώσεων, Οπότε η πιθανότητα είναι 50% και η σωστή απάντηση είναι η Β.

10. Το οδικό σύστημα μιας πόλης αποτελείται από τις κεντρικές οδικές αρτηρίες και τους παράδρομους που τέμνονται κάθετα. Οι κεντρικές οδικές αρτηρίες εκτείνονται με κατεύθυνση από ανατολή προς δύση, ενώ οι παράδρομοι με κατεύθυνση από βορρά προς νότο. Η Άννα θέλει να περπατήσει από τη διασταύρωση της 1ης οδικής αρτηρίας και του 1ου παράδρομου μέχρι τη διασταύρωση της 6ης οδικής αρτηρίας και του 3ου παράδρομου, περνώντας, όμως, από ακριβώς επτά διασταυρώσεις. Η φίλη της Άννας κάθεται σε ένα παγκάκι στα μισά των διασταυρώσεων της 4ης οδικής αρτηρίας και του 1ου και 2ου παράδρομου. Εάν η Άννα διαλέξει τη διαδρομή που θα ακολουθήσει τυχαία, η πιθανότητα να συναντήσει τη φίλη της είναι:

17,37%
15,12%
16,13%
14.29%

<u>Λύση</u>: Παρατηρώντας το ορθογώνιο σύστημα αξόνων ο μόνος τρόπος να μετακινηθεί η Άννα από το σημείο A(1,1) έως το σημείο B(3,6) περνώντας από ακριβώς επτά διασταυρώσεις είναι να μετακινηθεί 5 φορές προς τα πάνω και 2 φορές προς τα δεξιά. Η μετακίνηση της αυτή μπορεί να γίνει με $\frac{7!}{5!2!}$= 21 συνολικά τρόπους.

Για να συναντήσει η Άννα τη φίλη της θα πρέπει να περάσει οπωσδήποτε από το σημείο K(1,4), που η μετακίνηση αυτή μπορεί να γίνει μόνο εάν μετακινηθεί 3 φορές προς τα πάνω δηλ. κατά 1 τρόπο, και από το σημείο Λ(2,4). Η μετακίνηση της όμως από το σημείο Λ(2,4) έως το σημείο B(3,6) μπορεί να γίνει μόνο εάν μετακινηθεί 2 φορές προς τα επάνω και 1 φορά προς τα δεξιά, δηλ κατά
$\frac{3!}{2!1!}$= 3 τρόπους. Επομένως, η Άννα μπορεί να συναντήσει την φίλη της μόνο εάν μετακινηθεί κατά (1)(3) = 3 συνολικά τρόπους και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{3}{21}$= 14,29%.

Άρα η σωστή απάντηση είναι η D.

1.Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά τον μήνα Δεκέμβριο 2019, ποια μάρκα ήταν πρώτη σε πωλήσεις καινούργιων και μεταχειρισμένων επιβατηγών αυτοκινήτων στην Ελλάδα;

OPEL
NISSAN
TOYOTA
FIAT

2. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2018, πόσες ήταν οι αφίξεις αλλοδαπών στα καταλύματα ξενοδοχειακού τύπου του Δήμου Μυκόνου;

499.148

405.742

1.200,081

1.277,519

3. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2019, το κατώφλι της φτώχειας (σε ευρώ) για τα μονοπρόσωπα νοικοκυριά στην Ελλάδα ήταν:

9.908

7.863

4.917

2.718

4. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά τον μήνα Δεκέμβριο 2018, πόσες ήταν συνολικά οι εκδοθείσες άδειες οικοδομικής δραστηριότητας στο σύνολο της Χώρας;

1.181

1.166

1.568

15.325

5. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2018, η συνολική χρηματοδότηση για τις δαπάνες υγείας

ως ποσοστό % του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (ΑΕΠ) στην Ελλάδα ανήλθε στο:

8,21%

7,97%

8,28%

7,72%

6. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), κατά το έτος 2019, πόσοι ήταν οι επισκέπτες στον αρχαιολογικό χώρο της Ακρόπολης;

6.234.154

3.593.586

1.755.435

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

7. Σύμφωνα με τα στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποια από τις παρακάτω χώρες παρουσιάζει τον υψηλότερο «ελάχιστο μηνιαίο μισθό» κατά το δεύτερο εξάμηνο του 2019;

Κροατία
Λουξεμβούργο
Σλοβενία
Γαλλία

8. Σύμφωνα με τα στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποιες χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης των 27 προβλέπεται να έχουν τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο πληθυσμό, αντίστοιχα, το έτος 2100;

Γαλλία, Λιχτενστάιν
Ισπανία, Ισλανδία
Γερμανία, Μάλτα
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

9. Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, κατά το δεύτερο εξάμηνο του 2020, σε τι ποσό ανερχόταν ο χαμηλότερος μηνιαίος ακαθάριστος ελάχιστος μισθός (σε ευρώ) μεταξύ των χωρών μελών της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ);

311,89

280,01

209,10

295,02

10.Σύμφωνα με στοιχεία που δημοσιεύει η Eurostat, ποιο ήταν το ποσοστό συμμετοχής του τομέα των Τεχνολογιών Πληροφόρησης και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) στο Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν (ΑΕΠ) της Ιταλίας, κατά το έτος 2018;

7%
3,29%
5,25%
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

1. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, ποιος ήταν ο συνολικός αριθμός των ελληνόκτητων υπό ξένη σημαία πλοίων, 100 ΚΟΧ και άνω, που περιλαμβάνονταν στο μητρώο του Ναυτικού Απομαχικού Ταμείου (ΝΑΤ) κατά το έτος 2018;

1.238

1.155

1.355

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

2. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, κατά το έτος 2018, ποιο ήταν το ισοζύγιο της καθαρής μετανάστευσης στην Ελλάδα;

+ 8.920

+ 16.440

- 16.440

- 8.920

3. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, κατά το έτος 2018, ποια ομάδα ηλικιών είχε το μεγαλύτερο ποσοστό νεκρών πεζών από τροχαία ατυχήματα επί του συνόλου των θανόντων από τροχαία ατυχήματα στην Ελλάδα;

0 – 24

25 – 49

50 – 64

65+

4. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, κατά το έτος 2018, ποιος ήταν ο αριθμός των απασχολουμένων στις ιχθυοκαλλιέργειες στην Ελλάδα;

3.694

3.964

4.260

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

5. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, κατά τον Αύγουστο του 2015, ποια ήταν η επιβατική κίνηση στα αεροδρόμια της Χώρας (σε εκατομμύρια επιβατών);

7,8

8,2

24,3

24,5

6. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, κατά το έτος 2019, σε ποια ομάδα ηλικιών παρατηρούνται οι περισσότερες γεννήσεις κατά ηλικία της μητέρας στην Ελλάδα;

20-24

25-29

30-34

35-39

7.Σύμφωνα με το ηλεκτρονικό δημοσίευμα της Eurostat «Βασικά μεγέθη για την Ευρώπη — Οπτικοποιημένες στατιστικές — έκδοση 2020», το έτος 2019, ποιες ήταν οι δύο (2) χώρες με το μεγαλύτερο ποσοστό γυναικών που έχουν ολοκληρώσει τριτοβάθμια εκπαίδευση επί του συνόλου του γυναικείου πληθυσμού ηλικίας 25 έως 64 χρονών;

Ισλανδία, Φινλανδία
Ελβετία, Λουξεμβούργο
Ιρλανδία, Λουξεμβούργο
Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

8.Σύμφωνα με το ηλεκτρονικό δημοσίευμα της Eurostat «Βασικά μεγέθη για την Ευρώπη — Οπτικοποιημένες στατιστικές — έκδοση 2020», το ποσοστό απασχολούμενων νέων (επί του συνόλου του πληθυσμού ηλικίας 15-24 ετών) στη Γερμανία το έτος 2019 ήταν:

24,1%
34,3%
48,5%
23%

9.Σύμφωνα με το ηλεκτρονικό δημοσίευμα της Eurostat «Βασικά μεγέθη για την Ευρώπη — Οπτικοποιημένες στατιστικές — έκδοση 2020», σε ποιες από τις παρακάτω χώρες αντιστοιχεί το χαμηλότερο ποσοστό απασχολουμένων στον τομέα των υπηρεσιών κατά το έτος 2019 (επί του συνόλου των απασχολουμένων);

Βουλγαρία

Ιταλία
Βέλγιο
Ρουμανία

10.Σύμφωνα με το ηλεκτρονικό δημοσίευμα της Eurostat «Βασικά μεγέθη για την Ευρώπη — Οπτικοποιημένες στατιστικές — έκδοση 2020», ποια από τις παρακάτω χώρες είχε το μεγαλύτερο ποσοστό ατόμων που έκαναν διαδικτυακές τραπεζικές συναλλαγές, κατά το έτος 2019 (επί του συνόλου των ατόμων που χρησιμοποίησαν το διαδίκτυο τους τελευταίους τρεις μήνες του 2019);

Γερμανία

Φινλανδία

Βέλγιο

Σουηδία