<u>3ος Πανελλήνιος Διαγωνισμός στη Στατιστική (2020)</u>

<u>Θέματα 1ου Τεστ (Ασκήσεις και Λύσεις)</u>

<u>Κατηγορία: Γενικά και Επαγγελματικά Λύκεια</u>

<u>Εκδοχή: 1</u>

1. Έστω το σύνολο των διακριτών και μοναδικών παρατηρήσεων Α = {2, 4, 6, 8, x, y}. Αν οι παρατηρήσεις x και y είναι πρώτοι αριθμοί με 0 < x < 40 και 0 < y < 40, ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

I. Η μέγιστη δυνατή τιμή του εύρους των παρατηρήσεων του συνόλου Α είναι μεγαλύτερη από 33.
II. Ο διάμεσος δεν μπορεί ποτέ να είναι άρτιος αριθμός.
III. Εάν y = 37, η μέση τιμή των παρατηρήσεων του συνόλου Α είναι μεγαλύτερη από την διάμεσο αυτών.

A. Όλες είναι σωστές
B. Μόνο η I και η III είναι σωστές
C. Μόνο η I και η II είναι σωστές
D. Μόνο η II και η III είναι σωστές

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έχουμε ότι Α = {2, 4, 6, 8, x, y}όπου x και y είναι πρώτοι αριθμοί με 0 < x < 40 και 0 < y < 40
I. Ο μεγαλύτερος πρώτος μικρότερος του 40 είναι ο 37 . Για να έχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εύρους θα πρέπει ή ο x ή ο y να είναι 37. Άρα
R = 37-2 = 35
Σωστή.
II. Αν x και y είναι πρώτοι μεγαλύτεροι του 8 , η διάμεσος θα είναι (6+8)/2 = 7
Αν x και y είναι 3 και 5 , τότε Α = {2,3,4,5,6,8} , και η διάμεσος θα είναι 9/2
Αν x = 3 , τότε Α = { 2,3,4,6,8, y} , και η διάμεσος θα είναι 5

Αν x = 5 , τότε A = { 2,4,5,6,8,y} , και η διάμεσος θα είναι 11/2

Αν x = 7 , τότε A ={ 2,4,6,7,8,y} , και η διάμεσος θα είναι 13/2

Άρα τελικά η διάμεσος θα είναι ή περιττός ή δεκαδικός αριθμός.

Σωστή.

III. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του συνόλου A θα λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της όταν το x γίνεται ελάχιστο δηλ. 3. Άρα A = {2, 3, 4, 6, 8, 37}

Αν x=3 , η μέση τιμή θα είναι 60/6 = 10 και η διάμεσος θα είναι 5 .

Η διάμεσος θα είναι μεγαλύτερη όταν x>8 , δηλ. θα είναι 7 , και η μέση τιμή θα είναι μεγαλύτερη από 10 .

Σωστή

Σωστή απάντηση : A

2. Ένας καθηγητής Μαθηματικών, που ετοιμάζει πρόχειρο διαγώνισμα για τους μαθητές του, ορίζει τους συντελεστές α, β, και γ της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $αχ^2 + βχ + γ = 0$ ρίχνοντας ένα κανονικό ζάρι τρεις φορές. Η πιθανότητα η εξίσωση που σχηματίζεται να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες είναι

A. 11,35%

B. 17,59%

C. 14,49%

D. 15,87%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θα πρέπει Δ>0 => $β^2 > 4αγ$ => $β^2/4 > αγ$. Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα

β	1	2	3	4	5	6
$β^2/4$	**1/4**	**1**	**9/4**	**4**	**25/4**	**9**
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	2	4	6	8	10	12
αγ 3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

1. β = 1 => $β^2/4$ = 1/4 => $β^2/4$ =0,25 . Από τον πίνακα βλέπουμε ότι έχουμε 0 περιπτώσεις.

2. β = 2 => $β^2/4$ = 1. Πάλι από τον πίνακα βλέπουμε ότι έχουμε 0 περιπτώσεις.

3. β = 3 => $β^2/4$ = 9/4 => $β^2/4$ = 2,25. Βλέπουμε ότι έχουμε 3 περιπτώσεις.

4. β = 4 => $β^2/4$ = 4. Έχουμε από τον πίνακα 5 περιπτώσεις.

5. β = 5 => $β^2/4$ = 25/4 => $β^2/4$ = 6,25. Έχουμε 14 περιπτώσεις.

6. β = 6 => $β^2/4$ = 9. Έχουμε 16 περιπτώσεις.

Συνεπώς, έχουμε 3 + 5 + 14 + 16 = 38 ευνοϊκές περιπτώσεις σε σύνολο 6 . 6 . 6 = 216 περιπτώσεων. Άρα πιθανότητα p = 38/216 = 0,1759.

Σωστή απάντηση : B

3. Δέκα παίκτες, δύο γυναίκες και οκτώ άνδρες, συμμετέχουν στον πρώτο γύρο ενός τουρνουά τένις. Τα ζευγάρια καθορίζονται τυχαία με κλήρωση έτσι ώστε ο πρώτος που θα κληρωθεί να παίξει με τον δεύτερο που θα κληρωθεί κ.ο.κ. Η πιθανότητα να μην υπάρξει παιχνίδι στον πρώτο γύρο του τουρνουά μεταξύ των δύο γυναικών είναι:

A. 88,89%

B. 77,78%

C. 83,33%

D. 91,11%

ΛΥΣΗ

Η πρώτη θέση του ζευγαριού μπορεί να συμπληρωθεί από 10 άτομα, ενώ η δεύτερη από 9 άτομα. Από τη στιγμή που δεν με ενδιαφέρει η σειρά , όλοι οι πιθανοί τρόποι για να φτιαχτούν τα ζητούμενα ζευγάρια είναι (10 . 9) / 2 = 45. Άρα μπορώ να φτιάξω 45 πιθανά ζευγάρια.

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για να μην έχω ζευγάρι γυναικών, και δεδομένου ότι και πάλι δεν με ενδιαφέρει η σειρά , θα είναι (10 . 8) / 2 = 40.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι 40 / 45 = 0,8889.

Σωστή απάντηση : A

4. Τα σημεία Ο(0 , 0), Α(10 , 0) και Β(0 , 5) αποτελούν κορυφές τριγώνου. Επιλέγουμε στην τύχη ένα σημείο Κ(χ , ψ) στο εσωτερικό του τριγώνου. Η πιθανότητα ψ < 2χ είναι

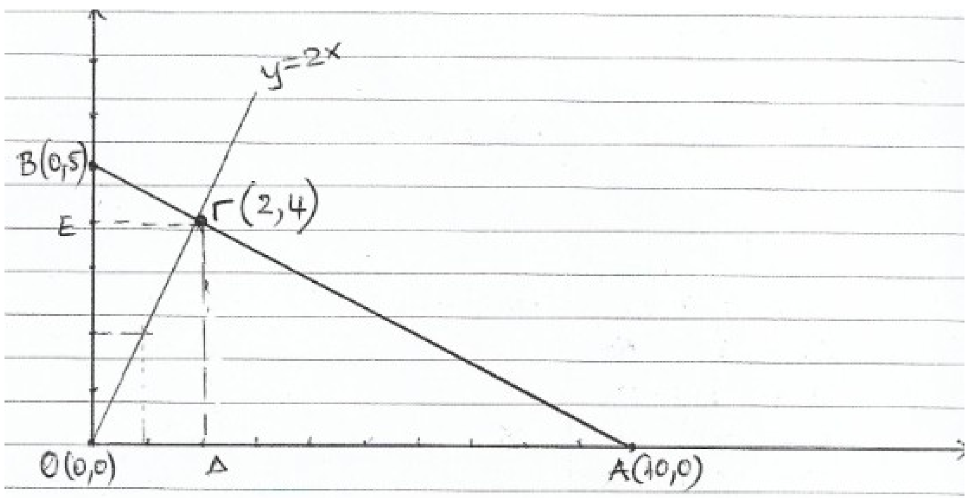
A. 70%

B. 60%

C. 80%

D. 45%

<u>ΛΥΣΗ</u>



Θεωρούμε το παραπάνω σχήμα και κατασκευάζουμε την ευθεία y = 2x.

Επειδή, όλα τα εσωτερικά σημεία του τριγώνου (ΟΓΑ) επαληθεύουν τη σχέση y < 2x, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι

p = { Εμβαδόν (ΟΓΑ) } / { Εμβαδόν (ΟΒΑ) }

Εμβαδόν (ΟΒΑ) = (10 . 5) / 2 = 25 , που είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις μας.

Εμβαδόν (ΟΓΑ) = (ΟΑ . ΓΔ) / 2 = (10 . ΓΔ) / 2 = 5 . ΟΕ , είναι οι ευνοϊκές μας περιπτώσεις

Για την ευθεία ΑΒ ισχύει ότι λ_{AB} = (5 – 0) / (0 – 10) = -1/2

Άρα η ευθεία ΑΒ έχει κλίση -1/2 και περνά από το σημείο Β (0 , 5), συνεπώς η εξίσωση της θα είναι η y = (-1/2) x + 5. Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των ευθειών y = 2x και y = (-1/2) x + 5. Επιλύοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι Γ (2 , 4).

Συνεπώς, Εμβαδόν (ΟΓΑ) = 5 . ΟΕ = 5 . 4 = 20, και η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι

p = 20 / 25 = 0,8

Σωστή απάντηση : C

5. Σε έναν μουσικό όμιλο, δέκα μουσικοί παίζουν πιάνο, έντεκα μουσικοί παίζουν κιθάρα, δεκατέσσερις μουσικοί παίζουν βιολί, τρεις μουσικοί παίζουν και τα τρία όργανα, ενώ είκοσι μουσικοί παίζουν μόνο ένα όργανο. Εάν επιλέξουμε τυχαία έναν μουσικό του ομίλου, η πιθανότητα να παίζει τουλάχιστον δύο όργανα είναι

A. 26,5%

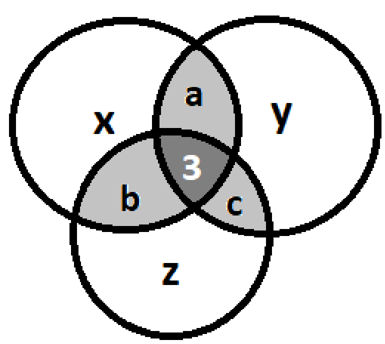
B. 28,1%

C. 23,1%

D. 27,1%

<u>**ΛΥΣΗ**</u>

Δημιουργούμε σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος το παρακάτω σχήμα



Έστω x : αυτοί που παίζουν μόνο πιάνο

Έστω y : αυτοί που παίζουν μόνο κιθάρα

Έστω z : αυτοί που παίζουν μόνο βιολί

Έχουμε ότι x + y + z = 20. Αλλά γνωρίζουμε επίσης ότι x + 3 + a + b = 10,

b + 3 + c + z = 11, a + 3 + c + y = 14 . Άρα x + y + z + 9 + 2a + 2b + 2c = 35 => a + b + c = 3

Συνεπώς, P [μουσικός να παίζει τουλάχιστον δύο όργανα] = P [μουσικός να παίζει δύο ή τρία όργανα] = (a + b + c + 3) / 26 = 6 / 26 = 0,231

Σωστή απάντηση : C

6. Το απόγευμα της προηγούμενης Παρασκευής, επειδή ο καιρός ήταν σχετικά καλός, ο κύριος Νίκος φεύγοντας από το γραφείο του αποφάσισε να περπατήσει την διαδρομή ως το σπίτι του. Όταν είχε ηλιοφάνεια περπατούσε με ταχύτητα κ km/h, κ θετικός ακέραιος, ενώ όταν είχε συννεφιά περπατούσε με ταχύτητα (κ+1) km/h. Εάν η μέση ταχύτητα του κατά τη διάρκεια της διαδρομής ήταν 2,8 km/h , το ποσοστό της συνολικής διαδρομής που περπάτησε με ηλιοφάνεια ήταν

A. 14,29%

B. 13,33%

C. 19,75%

D. 23,33%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω ότι περπάτησε x χιλιόμετρα με ηλιοφάνεια και y χιλιόμετρα με συννεφιά. Οι αντίστοιχοι χρόνοι που περπάτησε ήταν x/κ με ηλιοφάνεια και y/(κ+1) με συννεφιά, ενώ η μέση ταχύτητα του ήταν

$v_M = \dfrac{x+y}{x/k+y/(k+1)}$. Επειδή η μέση ταχύτητα του ανήκει στο διάστημα [κ , κ + 1] και ήταν 2,8 χιλιόμετρα την ώρα , είναι φανερό ότι κ = 2 . 'Αρα, $v_M = \dfrac{x+y}{x/2+y/3}$= 2,8 => y = 6x.

Τελικά, το ποσοστό της συνολικής διαδρομής που περπάτησε με ηλιοφάνεια ήταν

$\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{x}{x+6x} = \dfrac{x}{7x} = \dfrac{1}{7}$= 0,1429

Σωστή απάντηση : A

7. Από το σύνολο { 1, 2, 3, …, 96 } διαλέγουμε έναν τυχαίο αριθμό ν. Η πιθανότητα το γινόμενο ν.(ν+1).(ν+2) να διαιρείται με το οκτώ είναι

A. 50%

B. 58,5%

C. 60%

D. 62,5%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Το γινόμενο ν.(ν+1).(ν+2) θα είναι πολλαπλάσιο του 8 όταν :

<u>1η περίπτωση</u> : ν άρτιος , δηλαδή ν = 2κ . Τότε , ν.(ν+1).(ν+2) = 2κ.(2κ + 1).(2κ + 2) = 4.κ.(κ + 1).(2κ + 1) . Αλλά , το γινόμενο κ.(κ + 1) είναι πάντα άρτιος αριθμός και επομένως 4.2μ.(2κ + 1) = 8.μ.(2κ + 1) που είναι πολλαπλάσιο του 8.

<u>2η περίπτωση</u> : ν + 1 πολλαπλάσιο του 8.

Φτιάχνω δώδεκα ομάδες των 8 αριθμών ως εξής :

1η ομάδα : {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8}. Ευνοϊκές περιπτώσεις : 5 αριθμοί

2η ομάδα : {9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16}. Ευνοϊκές περιπτώσεις : 5 αριθμοί

.

.

12η ομάδα : {89 , 90 , 91 , 92 , 93 , 94 , 95 , 96}. Ευνοϊκές περιπτώσεις : 5 αριθμοί

Συνολικά έχουμε 5 . 12 = 60 αριθμούς, και επομένως η πιθανότητα θα είναι $\frac{60}{96}$= 0,625

Σωστή απάντηση : D

8. Από μια συνηθισμένη σκακιέρα επιλέγουμε τυχαία δύο τετράγωνα. Η πιθανότητα να έχουν μια κοινή πλευρά είναι

A. 9,84%

B. 12,22%

C. 11,11%

D. 5,56%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η σκακιέρα έχει 64 τετράγωνα. Το πρώτο τετράγωνο μπορούμε να το πάρουμε με 64 δυνατούς τρόπους , ενώ το δεύτερο με 63 δυνατούς τρόπους. Αλλά επειδή δεν ενδιαφερόμαστε για τη σειρά μπορούμε να πάρουμε τελικά τα δυο τετράγωνα με (64 . 63)/2 = 2016 τρόπους. Οι ευνοικοί τρόποι είναι (7 . 8) ανά γραμμή και (7 . 8) ανά στήλη, δηλαδή τελικά 2 . (7 . 8) = 112 τρόποι. Η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι 112 / 2016 = 0,0556.

Σωστή απάντηση : D

9.

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω = { x οι θετικοί ακέραιοι με $1 \leq x \leq 2020$ } . Ορίζουμε την πιθανότητα για κάθε $x \in \Omega$ ως εξής:

$$P\,(x) = \begin{cases} \dfrac{3\alpha^2}{1010}, & x\text{: άρτιος} \\ \dfrac{\alpha}{505}, & x\text{: περιττός} \end{cases}, \quad \text{με α θετικό πραγματικό αριθμό.}$$

Έστω το ενδεχόμενο A = { $x \in \Omega$: x πολλαπλάσιο του 3 }

Η πιθανότητα P (A) του ενδεχομένου A είναι:

A. 1/3

B. 1/4

C. 1/7

D. 1/9

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έχουμε ότι P(1) + P(2) + P(3) + … + P(2020) = 1 <=>

{P(1) + P(3) +… + P(2019)} + {P(2) + P(4) +… + P(2020)} = 1 <=>

1010 . $\frac{3\alpha^2}{1010}$+ 1010 . $\frac{\alpha}{505}$= 1 <=> $3\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$ <=> α = 1/3 ή α = -1 , απορρίπτεται.

Άρα α = 1/3.

Συνεπώς, P(x) = $\frac{1}{3030}$, x : άρτιος και P(x) = $\frac{1}{1515}$, x : περιττός

Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι :

P(A) = P(3) + P(6) + P(9) + P(12) + P(15) + … + P(2016) + P(2019) =

{P(3) + P(9) + P(15) + … +P(2019)} + {P(6) + P(12) + P(18) + … +P(2016)} =

336 . $\frac{1}{3030}$+ 337. $\frac{1}{1515}$ = $\frac{1010}{3030}$= 1/3

Σωστή απάντηση : A

10. Δύο ακέραιοι επιλέγονται ταυτόχρονα και τυχαία από το σύνολο Α= {2, 3, 5, 7, 8, 9}. Η πιθανότητα το γινόμενο τους να μπορεί να τεθεί στη μορφή ($α^2 – β^2$) , όπου α και β είναι θετικοί ακέραιοι, είναι

A. 56,67%

B. 68,33%

C. 73,33%

D. 71,11%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Οι δύο αριθμοί μπορούν να επιλεγούν κατά (6 . 5) / 2 = 15 διαφορετικούς τρόπους.

Το γινόμενο των αριθμών α και β μπορεί να γραφεί στη μορφή $α^2 – β^2$ εάν :

<u>1η περίπτωση</u> : Η διάμεσος των δύο αριθμών είναι φυσικός αριθμός.

Π.χ : Έστω ότι οι αριθμοί είναι α = 2 και β = 8. Η διάμεσος τους είναι δ = 5 που είναι φυσικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι 2 . 8 = 16 = (5 – 3) . (5 + 3) = $5^2 - 3^2$.

<u>2η περίπτωση</u> : Η διάμεσος των δύο αριθμών δεν είναι φυσικός αριθμός. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον έναν με το 2 και να διαιρέσουμε τον άλλον με το δύο όπως στα παρακάτω παραδείγματα, και εάν η διάμεσος των νέων αριθμών είναι φυσικός αριθμός τότε το γινόμενο μπορεί να γραφεί στη μορφή $α^2 – β^2$, αλλιώς δεν μπορεί.

Π.χ Έστω ότι οι αριθμοί είναι α = 3 και β = 8. Η διάμεσος τους είναι δ = 5,5 . Μπορούμε όμως να έχουμε : 3 . 8 = (3 . 2) . (8 : 2) = 6 . 4 . Η διάμεσος τους είναι δ = 5 που είναι φυσικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι 3 . 8 = (3 . 2) . (8 : 2) = 6 . 4 = (5 + 1) . (5 – 1) = $5^2 - 1^2$

Έστω ότι οι αριθμοί είναι α = 2 και β = 7. Η διάμεσος τους είναι δ = 4,5 . Μπορούμε όμως να έχουμε : 2 . 7 = (7 . 2) . (2 : 2) = 14 . 1 . Η διάμεσος τους είναι δ = 7,5 που δεν είναι φυσικός αριθμός. Επομένως, το γινόμενο 2 . 7 δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $α^2 – β^2$.

Κάνοντας τους παραπάνω ελέγχους στη μορφή $α^2 – β^2$ μπορούν να γραφούν τα ζευγάρια των αριθμών : (2 , 8) , (3 , 5) , (3 , 7) , (3 , 8) , (3 , 9) , (5 , 7) , (5 , 8) , (5 , 9) , (7 , 8) , (7 , 9) , (8 , 9) , δηλαδή 11 ζευγάρια αριθμών. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι 11 / 15 = 0,7333

Σωστή απάντηση : C

Εκδοχή: 2

1. Δύο φίλοι στέκονται στις όχθες μιας κυκλικής λίμνης με ακτίνα R μέτρα. Τοποθετούνται τυχαία και ανεξάρτητα στις όχθες της λίμνης κάθε φορά. Η πιθανότητα να απέχουν ο ένας από τον άλλον λιγότερο από (R/4) μέτρα σε ευθεία γραμμή είναι:

A. 7,98%

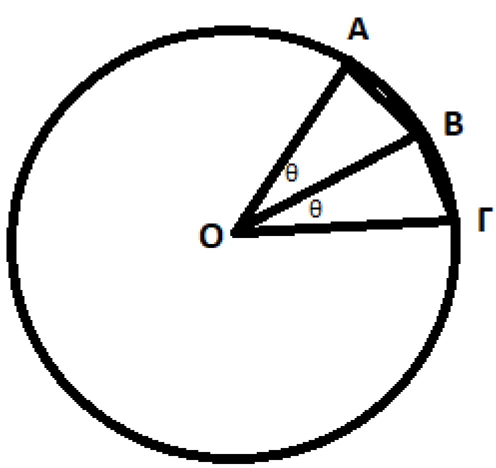
B. 4,33%

C. 9,12%

D. 11,11%

ΛΥΣΗ

Δημιουργούμε το παρακάτω σχήμα



Έχουμε ότι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = R και ότι ΑΒ = ΒΓ = R/4

Από το νόμο των συνημιτόνων γνωρίζουμε

$R^2/16 = R^2 + R^2 - 2.R^2.$συνθ => συνθ = 31/32 => θ = 14,3615°

Η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι P(AB < R/4 ή ΒΓ < R/4) = P(AB < R/4) + P(ΒΓ < R/4) =

= $14{,}3615^o / 360^o + 14{,}3615^o / 360^o = 28{,}723^o / 360^o = 0{,}0798$.

Σωστή απάντηση : Α

2. Ένας καθηγητής Μαθηματικών, που ετοιμάζει πρόχειρο διαγώνισμα για τους μαθητές του, ορίζει τους συντελεστές α, β, και γ της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $αχ^2 + βχ + γ = 0$ ρίχνοντας ένα κανονικό ζάρι τρεις φορές. Η πιθανότητα η εξίσωση που σχηματίζεται να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες είναι

A. 11,35%

B. 14,49%

C. 15,87%

D. 17,59%

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει Δ>0 => $β^2 > 4αγ$ => $β^2/4 > αγ$. Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα

β	1	2	3	4	5	6
$β^2/4$	**1/4**	**1**	**9/4**	**4**	**25/4**	**9**
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	2	4	6	8	10	12
αγ 3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

1. $\beta = 1 \Rightarrow \beta^2/4 = 1/4 \Rightarrow \beta^2/4 = 0{,}25$. Από τον πίνακα βλέπουμε ότι έχουμε 0 περιπτώσεις.

2. $\beta = 2 \Rightarrow \beta^2/4 = 1$. Πάλι από τον πίνακα βλέπουμε ότι έχουμε 0 περιπτώσεις.

3. $\beta = 3 \Rightarrow \beta^2/4 = 9/4 \Rightarrow \beta^2/4 = 2{,}25$. Βλέπουμε ότι έχουμε 3 περιπτώσεις.

4. $\beta = 4 \Rightarrow \beta^2/4 = 4$. Έχουμε από τον πίνακα 5 περιπτώσεις.

5. $\beta = 5 \Rightarrow \beta^2/4 = 25/4 \Rightarrow \beta^2/4 = 6{,}25$. Έχουμε 14 περιπτώσεις.

6. $\beta = 6 \Rightarrow \beta^2/4 = 9$. Έχουμε 16 περιπτώσεις.

Συνεπώς, έχουμε 3 + 5 + 14 + 16 = 38 ευνοϊκές περιπτώσεις σε σύνολο 6 . 6 . 6 = 216 περιπτώσεων. Άρα πιθανότητα p = 38/216 = 0,1759.

Σωστή απάντηση : D

3. Δέκα παίκτες, δύο γυναίκες και οκτώ άνδρες, συμμετέχουν στον πρώτο γύρο ενός τουρνουά τένις. Τα ζευγάρια καθορίζονται τυχαία με κλήρωση έτσι ώστε ο πρώτος που θα κληρωθεί να παίξει με τον δεύτερο που θα κληρωθεί κ.ο.κ. Η πιθανότητα να μην υπάρξει παιχνίδι στον πρώτο γύρο του τουρνουά μεταξύ των δύο γυναικών είναι:

A. 88,89%

B. 77,78%

C. 83,33%

D. 91,11%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Η πρώτη θέση του ζευγαριού μπορεί να συμπληρωθεί από 10 άτομα, ενώ η δεύτερη από 9 άτομα. Από τη στιγμή που δεν με ενδιαφέρει η σειρά , όλοι οι πιθανοί τρόποι για να φτιαχτούν τα ζητούμενα ζευγάρια είναι (10 . 9) / 2 = 45. Άρα μπορώ να φτιάξω 45 πιθανά ζευγάρια.

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για να μην έχω ζευγάρι γυναικών, και δεδομένου ότι και πάλι δεν με ενδιαφέρει η σειρά , θα είναι (10 . 8) / 2 = 40.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι 40 / 45 = 0,8889.

Σωστή απάντηση : A

4. Η Μαρία ετοίμασε τέσσερις διαφορετικές επιστολές για να σταλούν σε τέσσερις διαφορετικούς παραλήπτες. Για κάθε γράμμα, έφτιαξε ένα φάκελο με τη σωστή διεύθυνση του κάθε παραλήπτη. Εάν τα τέσσερα γράμματα τοποθετηθούν τυχαία στους τέσσερις φακέλους, η πιθανότητα μόνο ένα γράμμα να τοποθετηθεί στον φάκελο με τη σωστή διεύθυνση είναι:

A. 26,67%

B. 33,33%

C. 44,44%

D. 45,56%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Τα 4 γράμματα μπορούν να μπουν στους 4 φακέλους με 4! = 1 . 2 . 3 . 4 = 24 διαφορετικούς τρόπους. Για χάρη της γενικότητας ας θεωρήσουμε το γράμμα Γ1 που θα πρέπει να μπει στο φάκελο Φ1. Έχουμε ότι

Γ1 → Φ1 , σωστή επιλογή κατά 1 τρόπο

Γ2 → Φ3 ή Φ4 , λάθος επιλογή κατά 2 τρόπους

Γ3 → Φ2 ή Φ4 , λάθος επιλογή κατά 2 τρόπους

Γ4 → Φ2 ή Φ3 , λάθος επιλογή κατά 2 τρόπους

Άρα η πιθανότητα μόνο το πρώτο να μπει στο σωστό φάκελο είναι $\frac{1.2.2.2}{24} = \frac{8}{24} =$

= 0,3333.

Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να λύσουμε την άσκηση εάν θεωρήσουμε ότι το δεύτερο , το τρίτο ή το τέταρτο γράμμα μπήκε στο σωστό φάκελο.

Σωστή απάντηση : B

5. Σε έναν μουσικό όμιλο, δέκα μουσικοί παίζουν πιάνο, έντεκα μουσικοί παίζουν κιθάρα, δεκατέσσερις μουσικοί παίζουν βιολί, τρεις μουσικοί παίζουν και τα τρία όργανα, ενώ είκοσι μουσικοί παίζουν μόνο ένα όργανο. Εάν επιλέξουμε τυχαία έναν μουσικό του ομίλου, η πιθανότητα να παίζει τουλάχιστον δύο όργανα είναι

A. 26,5%

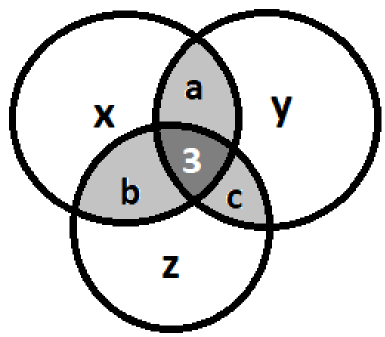
B. 27,1%

C. 28,1%

D. 23,1%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Δημιουργούμε σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος το παρακάτω σχήμα



Έστω x : αυτοί που παίζουν μόνο πιάνο

Έστω y : αυτοί που παίζουν μόνο κιθάρα

Έστω z : αυτοί που παίζουν μόνο βιολί

Έχουμε ότι $x + y + z = 20$. Αλλά γνωρίζουμε επίσης ότι $x + 3 + a + b = 10$,

$b + 3 + c + z = 11$, $a + 3 + c + y = 14$. Άρα $x + y + z + 9 + 2a + 2b + 2c = 35 \Rightarrow a + b + c = 3$

Συνεπώς, P [μουσικός να παίζει τουλάχιστον δύο όργανα] = P [μουσικός να παίζει δύο ή τρία όργανα] = $(a + b + c + 3) / 26 = 6 / 26 = 0{,}231$

Σωστή απάντηση : D

6. Οι πινακίδες κυκλοφορίας των οχημάτων μιας χώρας αποτελούνται από τέσσερα ψηφία (0-9) που ακολουθούνται από δύο γράμματα του λατινικού αλφαβήτου. Τα γράμματα A, B και C χρησιμοποιούνται μόνο από κρατικά οχήματα, ενώ τα γράμματα D έως Z χρησιμοποιούνται από μη κρατικά οχήματα. Η υπηρεσία πληροφοριών της χώρας ενημερώνει την αστυνομία ότι ένας κατάσκοπος έχει κλέψει ένα κυβερνητικό όχημα με πινακίδα που ξεκινά με 79 και προσπαθεί να διαφύγει. Αν η αστυνομία χρειάζεται 10 λεπτά για να επιθεωρήσει κάθε όχημα, η πιθανότητα η αστυνομία να συλλάβει τον κατάσκοπο μέσα σε τρεις ώρες είναι

A. 4%

B. 8%

C. 2%

D. 10%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Αφού η αστυνομία χρειάζεται 10 λεπτά για να επιθεωρήσει κάθε όχημα, τότε σε 3 ώρες = 180 λεπτά θα επιθεωρήσει 18 οχήματα. Κάθε πινακίδα αποτελείται από τέσσερα ψηφία από 0-9, αλλά τα πρώτα δύο έχουν ήδη καλυφθεί από το 7 και το 9. Οι δύο τελευταίες θέσεις των ψηφίων μπορούν να καλυφθούν από όλα τα ψηφία από 0 έως 9 και οι δύο θέσεις των γραμμάτων από κάθε γράμμα A, B, C. Συνεπώς, μπορούν να υπάρξουν 10 . 10 . 3 . 3 = 900 πιθανά αυτοκίνητα. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{18}{900}$= 0,02.

Σωστή απάντηση : C

7. Από το σύνολο { 1, 2, 3, …, 96 } διαλέγουμε έναν τυχαίο αριθμό ν. Η πιθανότητα το γινόμενο ν.(ν+1).(ν+2) να διαιρείται με το οκτώ είναι

A. 50%

B. 58,5%

C. 60%

D. 62,5%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Το γινόμενο ν.(ν+1).(ν+2) θα είναι πολλαπλάσιο του 8 όταν :

<u>1η περίπτωση</u> : ν άρτιος , δηλαδή ν = 2κ . Τότε , ν.(ν+1).(ν+2) = 2κ.(2κ + 1).(2κ + 2) =

4.κ.(κ + 1).(2κ + 1) . Αλλά , το γινόμενο κ.(κ + 1) είναι πάντα άρτιος αριθμός και επομένως

4.2μ.(2κ + 1) = 8.μ.(2κ + 1) που είναι πολλαπλάσιο του 8.

<u>2η περίπτωση</u> : ν + 1 πολλαπλάσιο του 8.

Φτιάχνω δώδεκα ομάδες των 8 αριθμών ως εξής :

1η ομάδα : {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8}. Ευνοϊκές περιπτώσεις : 5 αριθμοί

2η ομάδα : {9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16}. Ευνοϊκές περιπτώσεις : 5 αριθμοί

.

.

12η ομάδα : {89 , 90 , 91 , 92 , 93 , 94 , 95 , 96}. Ευνοϊκές περιπτώσεις : 5 αριθμοί

Συνολικά έχουμε 5 . 12 = 60 αριθμούς, και επομένως η πιθανότητα θα είναι $\frac{60}{96}$= 0,625

Σωστή απάντηση : D

8. Έστω x , y , z θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε x ≥ y ≥ z . Αν ο αριθμητικός μέσος των x, y και z είναι 40 και η διάμεσος είναι (x-13), η μέγιστη δυνατή τιμή του z είναι:

A. 29

B. 33

C. 35

D. 42

<u>ΛΥΣΗ</u>

Γνωρίζουμε ότι $\frac{x+y+z}{3}$= 40 => x + y + z = 120 , και ότι οι τρεις θετικοί ακέραιοι σε αύξουσα σειρά τοποθετούνται ως z, y, x . Επειδή η διάμεσος είναι x - 13 = y , θα έχουμε ότι x + x -13 + z = 120 => 2x + z = 133 => z = 133 – 2x. Σύμφωνα όμως με τα δεδομένα του προβλήματος ισχύει ότι $y \geq z$=> $x-13 \geq 133-2x$=> $3x \geq 146$=> $x \geq 48{,}667$. Αλλά επειδή $x \in \mathbb{Z}$ => x = 49, και συνεπώς z = 133 - 2x = 133 - 2(49) = 35.

Σωστή απάντηση : C

9. Ένα σημείο P επιλέγεται τυχαία μέσα σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α εκατοστών. Η πιθανότητα η γωνία $A\hat{P}B$ να είναι αμβλεία είναι

A. 39,3%

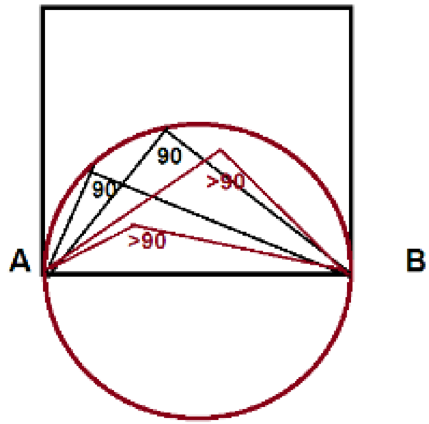
B. 41,1%

C. 43,2%

D. 46,5%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Δημιουργούμε το παρακάτω σχήμα



Η γωνία APB θα είναι 90^o όταν το AB είναι η διάμετρος ενός ημικυκλίου. Έτσι, το σημείο P μπορεί να είναι οπουδήποτε στο ημικύκλιο. Όμως σύμφωνα με το σχήμα, οποιοδήποτε σημείο εντός του ημικυκλίου θα δώσει γωνία μεγαλύτερη από 90^o. Η ζητούμενη επομένως πιθανότητα θα είναι

Πιθανότητα = εμβαδόν ημικυκλίου / εμβαδον τετραγώνου. Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα, Εμβαδόν ημικυκλίου =(πAB^2)/8 και Εμβαδόν τετραγώνου = AB^2. Άρα

Πιθανότητα = π/8 = 0,393

Σωστή απάντηση : A

10. Δύο ακέραιοι επιλέγονται ταυτόχρονα και τυχαία από το σύνολο A= {2, 3, 5, 7, 8, 9}. Η πιθανότητα το γινόμενο τους να μπορεί να τεθεί στη μορφή ($\alpha^2 - \beta^2$) , όπου α και β είναι θετικοί ακέραιοι, είναι

A. 56,67%

B. 68,33%

C. 73,33%

D. 71,11%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Οι δύο αριθμοί μπορούν να επιλεγούν κατά (6 . 5) / 2 = 15 διαφορετικούς τρόπους.

Το γινόμενο των αριθμών α και β μπορεί να γραφεί στη μορφή $α^2 – β^2$ εάν :

<u>1η περίπτωση</u> : Η διάμεσος των δύο αριθμών είναι φυσικός αριθμός.

Π.χ : Έστω ότι οι αριθμοί είναι α = 2 και β = 8. Η διάμεσος τους είναι δ = 5 που είναι φυσικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι $2 . 8 = 16 = (5 – 3) . (5 + 3) = 5^2 - 3^2$.

<u>2η περίπτωση</u> : Η διάμεσος των δύο αριθμών δεν είναι φυσικός αριθμός. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον έναν με το 2 και να διαιρέσουμε τον άλλον με το δύο όπως στα παρακάτω παραδείγματα, και εάν η διάμεσος των νέων αριθμών είναι φυσικός αριθμός τότε το γινόμενο μπορεί να γραφεί στη μορφή $α^2 – β^2$, αλλιώς δεν μπορεί.

Π.χ Έστω ότι οι αριθμοί είναι α = 3 και β = 8. Η διάμεσος τους είναι δ = 5,5 . Μπορούμε όμως να έχουμε : 3 . 8 = (3 . 2) . (8 : 2) = 6 . 4 . Η διάμεσος τους είναι δ = 5 που είναι φυσικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι $3 . 8 = (3 . 2) . (8 : 2) = 6 . 4 = (5 + 1) . (5 – 1) = 5^2 - 1^2$

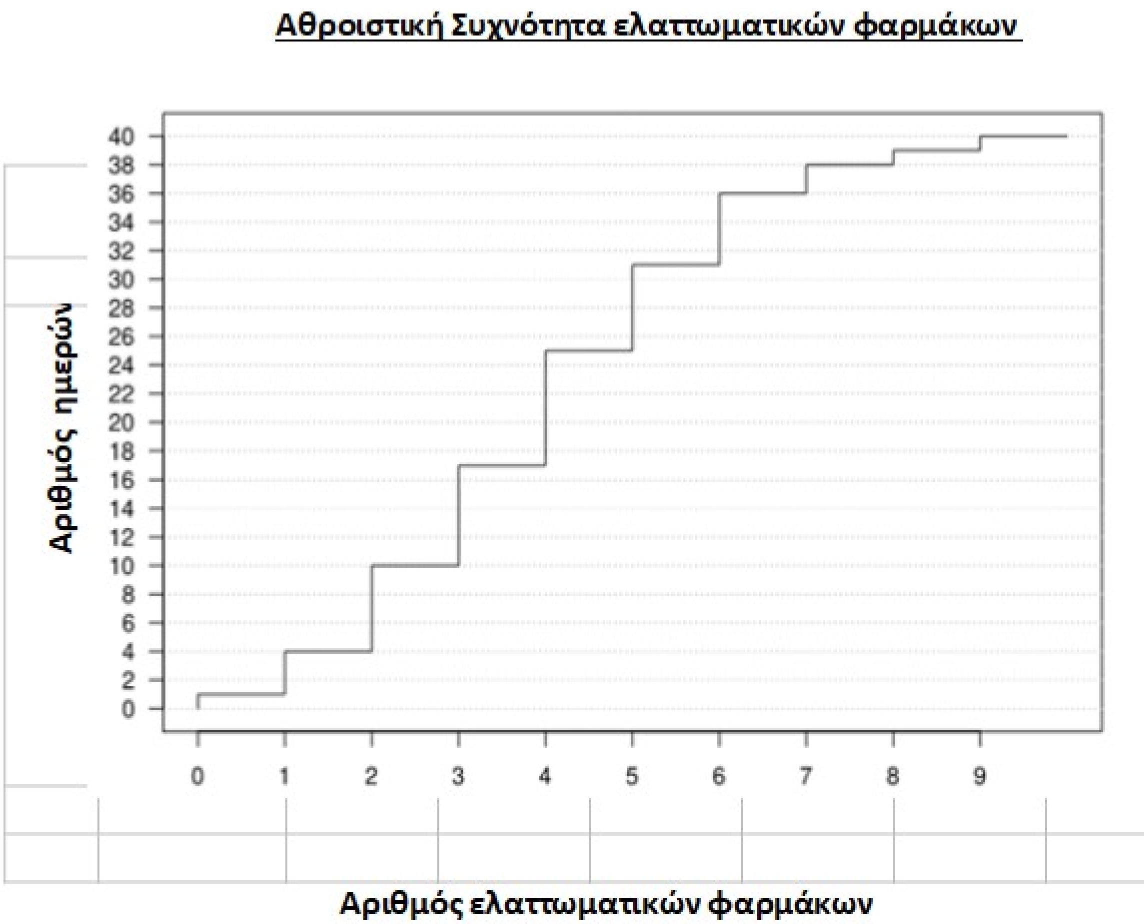
Έστω ότι οι αριθμοί είναι α = 2 και β = 7. Η διάμεσος τους είναι δ = 4,5 . Μπορούμε όμως να έχουμε : 2 . 7 = (7 . 2) . (2 : 2) = 14 . 1 . Η διάμεσος τους είναι δ = 7.5 που δεν είναι φυσικός αριθμός. Επομένως, το γινόμενο 2 . 7 δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $α^2 – β^2$.

Κάνοντας τους παραπάνω ελέγχους στη μορφή $α^2 – β^2$ μπορούν να γραφούν τα ζευγάρια των αριθμών : (2 , 8) , (3 , 5) , (3 , 7) , (3 , 8) , (3 , 9) , (5 , 7) , (5 , 8) , (5 , 9) , (7 , 8) , (7 , 9) , (8 , 9) , δηλαδή 11 ζευγάρια αριθμών. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι 11 / 15 = 0,7333

Σωστή απάντηση : C

Εκδοχή: 3

1. Το παρακάτω διάγραμμα μας παρουσιάζει την αθροιστική κατανομή του αριθμού των καθημερινών ελαττωματικών φαρμάκων που παράγονται από μια μηχανή σε δείγμα 40 ημερών



Εάν ο αριθμός των ελαττωματικών φαρμάκων που παράγονται από ένα δεύτερο μηχάνημα δίνεται από την εξίσωση y = 3x + 2, όπου x και y είναι ο αριθμός των ελαττωματικών φαρμάκων της πρώτης και της δεύτερης μηχανής αντίστοιχα, τότε

Α. Η μέση τιμή του αριθμού των ελαττωματικών φαρμάκων που παράγονται από το πρώτο μηχάνημα είναι πιο αντιπροσωπευτική από την μέση τιμή του αριθμού των ελαττωματικών φαρμάκων που παράγονται από το δεύτερο μηχάνημα

Β. Οι δύο μέσες τιμές είναι εξίσου αντιπροσωπευτικές

C. Η μέση τιμή και στις δύο περιπτώσεις δεν είναι το καλύτερο μέτρο θέσης

D. Η μέση τιμή του αριθμού των ελαττωματικών φαρμάκων που παράγονται από το δεύτερο μηχάνημα είναι πιο αντιπροσωπευτική από την μέση τιμή του αριθμού των ελαττωματικών φαρμάκων που παράγονται από το πρώτο μηχάνημα

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω x : ο αριθμός των καθημερινών ελαττωματικών φαρμάκων που παράγονται από την μηχανή A. Δημιουργούμε σύμφωνα με το σχήμα τον παρακάτω πίνακα

x_i	v_i	$v_i \cdot x_i$	$v_i \cdot x_i^2$
0	1	0	0
1	3	3	3
2	6	12	24
3	7	21	63
4	8	32	128
5	6	30	150
6	5	30	180
7	2	14	98
8	1	8	64
9	1	9	81
Σύνολο	**40**	**159**	**791**

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι

$\bar{x}= \frac{159}{40}= 3{,}975$ και $S_x^2 = \frac{1}{40}\{ 791 - \frac{159^2}{40}\} = 3{,}9744$.

Άρα, $S_x = \sqrt{3{,}9744}= 1{,}9936$, και τελικά $CV_x = \frac{1{,}9936}{3{,}975}= 0{,}5015$.

Έστω y : ο αριθμός των καθημερινών ελαττωματικών φαρμάκων που παράγονται από την μηχανή B. Θα έχουμε

$\bar{y}= 3\bar{x}+ 2 = 3 \cdot (3{,}975) + 2 = 13{,}925$ και $S_y = 3 \cdot S_x = 3 \cdot (1{,}9936) = 5{,}9808$. Τελικά,

$CV_y = \frac{5,9808}{13,925}$= 0,4295. Παρατηρούμε ότι $CV_y < CV_x$.

Σωστή απάντηση : D

2. Ένας καθηγητής Μαθηματικών, που ετοιμάζει πρόχειρο διαγώνισμα για τους μαθητές του, ορίζει τους συντελεστές α, β, και γ της δευτεροβάθμιας εξίσωσης αχ²+βχ+γ=0 ρίχνοντας ένα κανονικό ζάρι τρεις φορές. Η πιθανότητα η εξίσωση που σχηματίζεται να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες είναι:

A. 11,35%

B. 14,49%

C. 17,59%

D. 15,87%

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει Δ>0 => $β^2 > 4αγ$ => $β^2/4 > αγ$. Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα

β	1	2	3	4	5	6
$β^2/4$	**1/4**	**1**	**9/4**	**4**	**25/4**	**9**
1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	2	4	6	8	10	12
αγ 3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

1. β = 1 => $β^2/4$ = 1/4 => $β^2/4$ =0,25 . Από τον πίνακα βλέπουμε ότι έχουμε 0 περιπτώσεις.

2. β = 2 => $β^2/4$ = 1. Πάλι από τον πίνακα βλέπουμε ότι έχουμε 0 περιπτώσεις.

3. β = 3 => $β^2/4$ = 9/4 => $β^2/4$ = 2,25. Βλέπουμε ότι έχουμε 3 περιπτώσεις.

4. $\beta = 4 \Rightarrow \beta^2/4 = 4$. Έχουμε από τον πίνακα 5 περιπτώσεις.

5. $\beta = 5 \Rightarrow \beta^2/4 = 25/4 \Rightarrow \beta^2/4 = 6{,}25$. Έχουμε 14 περιπτώσεις.

6. $\beta = 6 \Rightarrow \beta^2/4 = 9$. Έχουμε 16 περιπτώσεις.

Συνεπώς, έχουμε 3 + 5 + 14 + 16 = 38 ευνοϊκές περιπτώσεις σε σύνολο 6 . 6 . 6 = 216 περιπτώσεων. Άρα πιθανότητα p = 38/216 = 0,1759.

Σωστή απάντηση : C

3. Δέκα παίκτες, δύο γυναίκες και οκτώ άνδρες, συμμετέχουν στον πρώτο γύρο ενός τουρνουά τένις. Τα ζευγάρια καθορίζονται τυχαία με κλήρωση έτσι ώστε ο πρώτος που θα κληρωθεί να παίξει με τον δεύτερο που θα κληρωθεί κ.ο.κ. Η πιθανότητα να μην υπάρξει παιχνίδι στον πρώτο γύρο του τουρνουά μεταξύ των δύο γυναικών είναι:

A. 77,78%
B. 83,33%
C. 91,11%
D. 88,89%

ΛΥΣΗ

Η πρώτη θέση του ζευγαριού μπορεί να συμπληρωθεί από 10 άτομα, ενώ η δεύτερη από 9 άτομα. Από τη στιγμή που δεν με ενδιαφέρει η σειρά , όλοι οι πιθανοί τρόποι για να φτιαχτούν τα ζητούμενα ζευγάρια είναι (10 . 9) / 2 = 45. Άρα μπορώ να φτιάξω 45 πιθανά ζευγάρια.

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις για να μην έχω ζευγάρι γυναικών, και δεδομένου ότι και πάλι δεν με ενδιαφέρει η σειρά , θα είναι (10 . 8) / 2 = 40.

Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι 40 / 45 = 0,8889.

Σωστή απάντηση : D

4. Έστω A ένα σύνολο είκοσι πέντε μοναδικών ακεραίων παρατηρήσεων. Εάν η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων του συνόλου Α είναι 50 , η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η μέγιστη παρατήρηση είναι:

A. 95

B. 72

C. 62

D. 88

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω οι μοναδικοί ακέραιοι x_1 , x_2 ,…., x_{25} τοποθετημένοι σε αύξουσα σειρά. Επειδή έχουμε 25 παρατηρήσεις θα ισχύει ότι $\delta = x_{13} = 50$. Επίσης, $R = \max - \min = x_{25} - x_1 = 50$. Άρα $\max = 50 + x_1$. Συνεπώς , θα πρέπει να βρούμε την μέγιστη τιμή του x_1 . Αφού όλοι οι ακέραιοι είναι μοναδικοί θα πρέπει η μέγιστη αυτή τιμή να είναι 50 - 12 = 38 και το σύνολο Α θα είναι A = { **38**, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, **50**, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, **88** }

Σωστή απάντηση : D

5. Σε έναν μουσικό όμιλο, δέκα μουσικοί παίζουν πιάνο, έντεκα μουσικοί παίζουν κιθάρα, δεκατέσσερις μουσικοί παίζουν βιολί, τρεις μουσικοί παίζουν και τα τρία όργανα, ενώ είκοσι μουσικοί παίζουν μόνο ένα όργανο. Εάν επιλέξουμε τυχαία έναν μουσικό του ομίλου, η πιθανότητα να παίζει τουλάχιστον δύο όργανα είναι

A. 26,5%

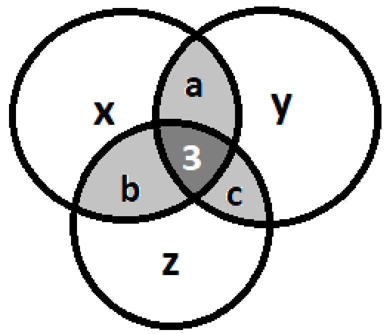
B. 23,1%

C. 28,1%

D. 27,1%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Δημιουργούμε σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος το παρακάτω σχήμα



Έστω x : αυτοί που παίζουν μόνο πιάνο

Έστω y : αυτοί που παίζουν μόνο κιθάρα

Έστω z : αυτοί που παίζουν μόνο βιολί

Έχουμε ότι $x + y + z = 20$. Αλλά γνωρίζουμε επίσης ότι $x + 3 + a + b = 10$,

$b + 3 + c + z = 11$, $a + 3 + c + y = 14$. Άρα $x + y + z + 9 + 2a + 2b + 2c = 35 \Rightarrow a + b + c = 3$

Συνεπώς, P [μουσικός να παίζει τουλάχιστον δύο όργανα] = P [μουσικός να παίζει δύο ή τρία όργανα] = $(a + b + c + 3) / 26 = 6 / 26 = 0{,}231$

Σωστή απάντηση : B

6. Η πιθανότητα ο κύριος Γιώργος να αγοράσει έναν καφέ πηγαίνοντας στο γραφείο του είναι μεγαλύτερη από 0,6. Η πιθανότητα να αγοράσει έναν καφέ και μία σαλάτα είναι μικρότερη από 0,5, ενώ η πιθανότητα να αγοράσει έναν καφέ ή να αγοράσει μία σαλάτα ισούται με 0,7. Έστω p = η πιθανότητα, ο κύριος Γιώργος να αγοράσει μία σαλάτα . Από τις παρακάτω προτάσεις αληθής είναι η :

A. $0 < p \leq 0{,}6$

B. $0 \leq p < 0{,}6$

C. $0 \leq p \leq 0{,}6$

D. $0 < p < 0{,}6$

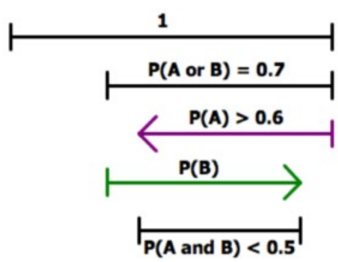
Λύση

Έστω το ενδεχόμενο A = ο κύριος Γιώργος αγοράζει καφέ , και το ενδεχόμενο B = ο κύριος Γιώργος αγοράζει σαλάτα για το μεσημεριανό γεύμα. Το πρόβλημα μας λέει ότι:

P (A)> 0,6, P (A και B) <0,5, P (A ή B) = 0,7

Πρώτα ας καθορίσουμε την ελάχιστη τιμή του p. Αν ο κύριος Γιώργος δεν αγοράσει σαλάτα για μεσημεριανό γεύμα, p = 0, και P (A and B) = 0, το οποίο είναι μικρότερο από 0,5, και θα μπορούσε να είναι τότε P (A) = 0,7, περισσότερο από 0,6, έτσι ώστε το P (A ή B) = 0,7. Όλες οι απαιτήσεις μπορούν να ικανοποιηθούν εάν p = 0, οπότε είναι δυνατόν να ισούται με αυτή την ελάχιστη τιμή.

Τώρα, η μέγιστη τιμή. Δεδομένου ότι το P (A ή B) = 0,7, τόσο το P (A) όσο και το P (B) πρέπει να περιέχονται σε αυτήν την περιοχή. Δείτε το παρακάτω διάγραμμα.



Η πάνω γραμμή, 1, είναι ολόκληρος ο πιθανοθεωρητικός χώρος. Η δεύτερη γραμμή, P (A ή B) = 0,7, καθορίζει τα όρια για A και B. P (A) είναι το πορφυρό βέλος που εκτείνεται από τα δεξιά. Το P (B) είναι το πράσινο βέλος που εκτείνεται από τα αριστερά. Η κάτω γραμμή, P (A και B) < 0,5, είναι ο περιορισμός της πιθανής επικάλυψης τους.

Ας πούμε ότι το P (A) είναι λίγο περισσότερο από 0,6. Αυτό σημαίνει ότι η περιοχή έξω από το P (A), αλλά μέσα στο P (A ή B) είναι λίγο μικρότερη από 1. Αυτό είναι το τμήμα του P (B) που δεν επικαλύπτεται με το P (A). Στη συνέχεια, η επικάλυψη πρέπει να είναι μικρότερη από 0,5. Εάν προσθέσουμε κάτι λιγότερο από 1 σε κάτι μικρότερο από 5, παίρνουμε κάτι λιγότερο από 6. Το P (B) δεν μπορεί να είναι ίσο με 0,6, αλλά μπορεί οποιαδήποτε τιμή αυθαίρετα να είναι κοντά στο 0,6. Έτσι, 0 ≤ P (B) < 0,6.

Σωστή απάντηση : B

7. Από το σύνολο { 1, 2, 3, …, 96 } διαλέγουμε έναν τυχαίο αριθμό ν. Η πιθανότητα το γινόμενο ν.(ν+1).(ν+2) να διαιρείται με το οκτώ είναι

A. 50%

B. 58,5%

C. 62,5%

D. 60%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Το γινόμενο ν.(ν+1).(ν+2) θα είναι πολλαπλάσιο του 8 όταν :

<u>1η περίπτωση</u> : ν άρτιος , δηλαδή ν = 2κ . Τότε , ν.(ν+1).(ν+2) = 2κ.(2κ + 1).(2κ + 2) = 4.κ.(κ + 1).(2κ + 1) . Αλλά , το γινόμενο κ.(κ + 1) είναι πάντα άρτιος αριθμός και επομένως 4.2μ.(2κ + 1) = 8.μ.(2κ + 1) που είναι πολλαπλάσιο του 8.

<u>2η περίπτωση</u> : ν + 1 πολλαπλάσιο του 8.

Φτιάχνω δώδεκα ομάδες των 8 αριθμών ως εξής :

1η ομάδα : {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8}. Ευνοϊκές περιπτώσεις : 5 αριθμοί

2η ομάδα : {9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16}. Ευνοϊκές περιπτώσεις : 5 αριθμοί

.

.

12η ομάδα : {89 , 90 , 91 , 92 , 93 , 94 , 95 , 96}. Ευνοϊκές περιπτώσεις : 5 αριθμοί

Συνολικά έχουμε 5 . 12 = 60 αριθμούς, και επομένως η πιθανότητα θα είναι $\frac{60}{96}$= 0,625

Σωστή απάντηση : C

8. Επιλέγουμε τυχαία έναν πραγματικό αριθμό x του διαστήματος [0,3] και έναν τυχαίο πραγματικό αριθμό y του διαστήματος [2,4]. Η πιθανότητα x ≤ y είναι:

A. 76,32%

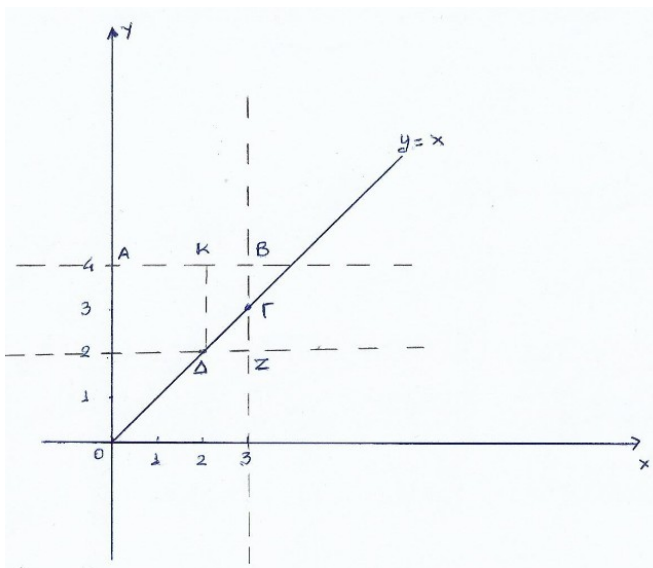
B. 85,32%

C. 88,59%

D. 91,67%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Φτιάχνω την ευθεία y = x . Επειδή θέλουμε $x \leq y$, οι ευνοικές μας περιπτώσεις είναι τα σημεία του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΑ, σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα



Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι

P [$x \leq y$] = $\frac{E(ΑΒΓΔΕΑ)}{E(ΑΒΖΕ)}$= $\frac{E(ΑΚΔΕ)+E(ΒΚΔΓ)}{E(ΑΒΖΕ)}$= $\frac{(2.2)+((2+1).1)/2}{6}$=

$\frac{4+1,5}{6}$= $\frac{5,5}{6}$= 0,9167

Σωστή απάντηση : D

9. Έστω κ : το άθροισμα των ενδείξεων κατά τη ρίψη τριών αμερόληπτων ζαριών και π(κ) : η πιθανότητα εμφάνισης του κ αθροίσματος. Τότε ισχύει ότι:

A. π(9) > π(11)

B. π(10) = π(12)

C. π(11) > π(12)

D. π(10) < π(11)

<u>ΛΥΣΗ</u>

Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα που μας παρουσιάζει τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε τα ζητούμενα αθροίσματα

Άθροισμα 9	**Τρόποι**	**Άθροισμα 10**	**Τρόποι**	**Άθροισμα 11**	**Τρόποι**	**Άθροισμα 12**	**Τρόποι**
6-2-1	6	6-3-1	6	6-4-1	6	4-4-4	1
5-3-1	6	5-4-1	6	5-3-3	3	5-4-3	6
4-4-1	3	5-3-2	6	5-4-2	6	5-5-2	3
3-3-3	1	4-3-3	3	6-2-3	6	5-6-1	6
5-2-2	3	4-4-2	3	5-5-1	3	6-3-3	3
4-3-2	6	6-2-2	3	4-4-3	3	4-6-1	6
Σύνολο	**25**	**Σύνολο**	**27**	**Σύνολο**	**27**	**Σύνολο**	**25**

Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί όταν ρίχνω τρία ζάρια είναι 6 . 6 . 6 = 216.

Συνεπώς π(9) = $\frac{25}{216}$, π(10) = $\frac{27}{216}$, π(11) = $\frac{27}{216}$, π(12) = $\frac{25}{216}$

Σωστή απάντηση : C

Η παραπάνω άσκηση αποτελεί ένα από τα ιστορικά προβλήματα της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Συγκεκριμένα τέθηκε από τον Μεγάλο Δούκα της Τοσκάνης στον διάσημο φυσικό και μαθηματικό Galileo Galilei (1564–1642). Η ρίψη τριών ζαριών ήταν μέρος του παιχνιδιού *passadieci*, στο οποίο για να κερδίσει κάποιος παίκτης έπρεπε να φέρει άθροισμα τουλάχιστον 11 κατά τη ρίψη τριών αμερόληπτων ζαριών. Ο Γαλιλαίος το 1620 δημοσίευσε τη παραπάνω λύση στην εργασία του *Sopra le scoperte dei dadi* .

10. Δύο ακέραιοι επιλέγονται ταυτόχρονα και τυχαία από το σύνολο A= {2, 3, 5, 7, 8, 9}. Η πιθανότητα το γινόμενο τους να μπορεί να τεθεί στη μορφή ($α^2–β^2$), όπου α και β είναι θετικοί ακέραιοι, είναι:

A. 56,67%

B. 68,33%

C. 71,11%

D. 73,33%

<u>ΛΥΣΗ</u>

Οι δύο αριθμοί μπορούν να επιλεγούν κατά (6 . 5) / 2 = 15 διαφορετικούς τρόπους.

Το γινόμενο των αριθμών α και β μπορεί να γραφεί στη μορφή $α^2 – β^2$ εάν :

<u>1η περίπτωση</u> : Η διάμεσος των δύο αριθμών είναι φυσικός αριθμός.

Π.χ : Έστω ότι οι αριθμοί είναι α = 2 και β = 8. Η διάμεσος τους είναι δ = 5 που είναι φυσικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι 2 . 8 = 16 = (5 – 3) . (5 + 3) = 5^2 - 3^2 .

<u>2η περίπτωση</u> : Η διάμεσος των δύο αριθμών δεν είναι φυσικός αριθμός. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον έναν με το 2 και να διαιρέσουμε τον άλλον με το δύο όπως στα παρακάτω παραδείγματα, και εάν η διάμεσος των νέων αριθμών είναι φυσικός αριθμός τότε το γινόμενο μπορεί να γραφεί στη μορφή $α^2 – β^2$, αλλιώς δεν μπορεί.

Π.χ Έστω ότι οι αριθμοί είναι α = 3 και β = 8. Η διάμεσος τους είναι δ = 5,5 . Μπορούμε όμως να έχουμε : 3 . 8 = (3 . 2) . (8 : 2) = 6 . 4 . Η διάμεσος τους είναι δ = 5 που είναι φυσικός αριθμός. Παρατηρούμε ότι 3 . 8 = (3 . 2) . (8 : 2) = 6 . 4 = (5 + 1) . (5 – 1) = 5^2 - 1^2

Έστω ότι οι αριθμοί είναι α = 2 και β = 7. Η διάμεσος τους είναι δ = 4,5 . Μπορούμε όμως να έχουμε : 2 . 7 = (7 . 2) . (2 : 2) = 14 . 1 . Η διάμεσος τους είναι δ = 7.5 που δεν είναι φυσικός αριθμός. Επομένως, το γινόμενο 2 . 7 δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή $α^2 – β^2$.

Κάνοντας τους παραπάνω ελέγχους στη μορφή $α^2 – β^2$ μπορούν να γραφούν τα ζευγάρια των αριθμών : (2 , 8) , (3 , 5) , (3 , 7) , (3 , 8) , (3 , 9) , (5 , 7) , (5 , 8) , (5 , 9) , (7 , 8) , (7 , 9) , (8 , 9) , δηλαδή 11 ζευγάρια αριθμών. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι 11 / 15 = 0,7333

Σωστή απάντηση : D